European Journal of Interdisciplinary Research and Development
Volume-15 May. 2023
Website: www.ejird.journalspark.org ISSN (E): 2720-5746

TIP O‘ZGARISH CHIZIG‘I SILLIQ BO‘LMAGAN PARABOLO-GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN BIRINCHI NOLOKAL MASALA YECHIMINING YAGONALIGI

Xalilov Qobiljon Solijonovich,
katta o‘qituvchi,

Abdujabborov Abduxalim Abdug‘oppor o‘g‘li,
Magistr, Farg‘ona davlat universiteti,
O‘zbekiston, Farg‘ona shahar

Annotatsiya:
Ushbu ishda tip o‘zgarish chizig‘i silliq bo‘lmagan parabolo-giperbolik tenglama uchun qo‘yilgan integral shartli masalaning bir qiymatli yechilishi tadqiq qilingan.

Kalit so’zlar: parabolo-giperbolik tenglama, integral shartli masala, qiymat.

KIRISH

Ma’lumki, aralash tipdagi differensial tenglamalar bo‘yicha tadqiqotlar tarixi bir asrga yaqin bo‘lib, hozirgi kunda xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining jadal rivojlanayotgan yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi.

Aralash tipdagi parabolo-giperbolik tenglamalar uchun turli lokal va nolokal shartli masalalar xorijiy va respublikamiz olimlari tomonidan tadqiqotlar olib borilmoqda [masalan 1-15].

xOy tekisligining $x\geq 0,\ y\geq 0$ bo‘lganda $x=1,\ y=1$ to‘g‘ri chiziqlar bilan, $x\geq 0,\ y\leq 0$ bo‘lganda $x=0$, $x-y=1$ hamda $x\leq 0,\ y\geq 0$ bo‘lganda esa $y=0,\ x-y=-1$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan D sohada

$$u_{xx}-\frac{1}{2}\left(1-sign\left(xy\right)\right)u_{yy}-\frac{1}{2}\left(1+sign\left(xy\right)\right)u_{y}=0 \tag{1}$$

tenglamani qaraylik,

$$D_0=D\cap\{(x,y):x>0,y>0\},\ D_1=D\cap\{(x,y):y<0,x+y>0\},$$
$$D_2=D\cap\{(x,y):y<0,x+y<0\},\ D_3=D\cap\{(x,y):x<0,x+y>0\},$$
$$D_4=D\cap\{(x,y):x<0,x+y<0\};$$

$OA_1,\ OA_2,\ OB_1,\ OB_2$ lar mos ravishda $x=0,\ y=0$ chiziqlarning kesmalari, bu yerda $O(0,0),\ A_1(0,1),\ B_1(1,0),\ A_2(0,-1),\ B_2(-1,0),\ E\left(1/2,-1/2\right),\ F\left(-1/2,1/2\right)$, $I=\{(x,y):x+y=0,(-1/2)<x<(1/2)\}$.

(1) tenglama D_0 va $D_1\cup D_2$ $\left(D_3\cup D_4\right)$ sohalarda mos ravishda parabolik va giperbolik tipga tegishli bo‘lib, u D_0 sohada

$$u_{xx}-u_y=0,\ \ \left(x,y\right)\in D_0, \tag{2}$$

$D_1 \cup D_2$ va $D_3 \cup D_4$ sohalarda

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \tag{3}$$

ko‘rinishlarda yoziladi; OB_1 va OA_1 – (1) tenglamaning tip o‘zgarish chiziqlari bo‘lib, OB_1 – (1) tenglama uchun xarakteristika bo‘ladi, OA_1 esa xarakteristika bo‘lmaydi.

D sohada quyidagi masalani qaraylik.

BS_1 **masala.** Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x,y)$ funksiya D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 sohalarda (1) tenglamaning regulyar yechimi;

2) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_0) \cap C^{2,2}_{x,y}(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \setminus I)$ sinfga tegishli;

3) quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$u(1,y) = \alpha(y)u(0,y) + \varphi(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{4}$$

$$u_x(0,y) = f_1(y), \quad -1 < y < 0; \tag{5}$$

$$u(0,y) = -u(0,-y) + f_2(y), \quad -1 \le y \le 0; \tag{6}$$

$$u_y(x,0) = g_1(x), \quad -1 < x < 0; \tag{7}$$

$$u(x,0) = u(-x,0) + g_2(x), -1 \le x \le 0, \tag{8}$$

OB_1 va OA_1 tip o‘zgarish chiziqlarida esa

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0), \quad 0 < x < 1,$$
$$u_x(+0,y) = u_x(x,-0), \quad 0 < y < 1$$

ulash shartlarini bajarsin, bu yerda $\alpha(y), \varphi(y), f_1(y), f_2(y), g_1(x), g_2(x)$ – berilgan uzluksiz funksiyalar.

Masalani tadqiq qilishda quyidagi belgilash va farazlarni kiritaylik:

$$u(x,0) = \tau_1(x), \ 0 \le x \le 1; \ u_y(x,0) = \nu_1(x), \ 0 < x < 1;$$
$$u(0,y) = \tau_2(y), \ 0 \le y \le 1; \ u_x(0,y) = \nu_2(y), \ 0 < y < 1;$$
$$\tau_j(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \ \nu_j(x) \in C^1(0,1) \cap L(0,1), \ j = \overline{1,4}.$$

Yuqoridagilarga asosan D_j $j = \overline{1,4}$ sohalarda (1) tenglama uchun Koshi masalasining yechimi $u(x,y)$ funksiyani quyidagi

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[\tau_1(x+y) + \tau_1(x-y)] + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \nu_1(t)\,dt, \qquad (x,y) \in D_1; \tag{9}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau_2^*(y+x) + \tau_2^*(y-x)\right] + \frac{1}{2}\int_{y-x}^{y+x} \nu_2^*(t)\,dt, \qquad (x,y) \in D_2; \tag{10}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[\tau_2(y+x) + \tau_2(y-x)] + \frac{1}{2}\int_{y-x}^{y+x} \nu_2(t)\,dt, \qquad (x,y) \in D_3; \tag{11}$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau_1^*(x+y)+\tau_1^*(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu_1^*(t)\,dt, \qquad (x,y)\in D_4. \tag{12}$$

ko‘rinishlarda yozish mumkin.

Masalaning qo‘yilishiga ko‘ra

$$\lim_{y\to -x-0} u(x,y)=\lim_{y\to -x+0} u(x,y), \quad 0\le x\le (1/2) \tag{13}$$

tenglik o‘rinli.

(9) va (10) ifodalarni (13) tenglikka bo‘ysundirib,

$$\tau_1(0)+\tau_1(2x)-\int_0^{2x}\nu_1(t)\,dt=\tau_2^*(0)+\tau_2^*(-2x)+\int_{-2x}^{0}\nu_2^*(t)dt, \quad 0\le x\le 1/2$$

munosabat kelib chiqadi.

Oxirgi tenglikda $\tau_1(0)=\tau_2^*(0)$ ekanligini tenglikni e’tiborga olib hamda $2x=z$ almashirish bajarasak,

$$\tau_1(z)-\tau_2^*(-z)=\int_0^z\left[\nu_1(t)+\nu_2^*(-t)\right]dt, \; 0\le z\le 1 \tag{14}$$

hosil bo‘ladi.

(14) tenglikda (5), (6) shartlarni va yuqoridagi belgilashlarni e’tiborga olib

$$\tau_1(z)+\tau_2(z)=\int_0^z\left[\nu_1(t)+f_1(-t)\right]dt+f_2(-z). \tag{15}$$

munosabat topiladi. Bunda $z=x$ almashirish bajarilsa,

$$\tau_1(x)+\tau_2(x)=\int_0^x\left[\nu_1(t)+f_1(-t)\right]dt+f_2(-x), \; 0\le x\le 1 \tag{16}$$

hosil bo‘ladi.

Endi (11) va (12) ifodalarni

$$\lim_{x\to -y-0} u(x,y)=\lim_{x\to -y+0} u(x,y), \quad 0\le y\le 1/2 \tag{17}$$

shartga bo‘ysundirib,

$$\tau_2(0)+\tau_2(2y)-\int_0^{2y}\nu_1(t)\,dt=\tau_1^*(0)+\tau_1^*(-2y)+\int_{-2y}^{0}\nu_1^*(t)dt, \; 0\le y\le 1/2$$

tenglik topiladi.

Oxirgi tenglikda $\tau_2(0)=\tau_1^*(0)$ ekanligini e’tiborga olib hamda $2y=z$ almashirish bajarsak,

$$\tau_2(z)-\tau_1^*(-z)=\int_0^z\left[\nu_2(t)+\nu_1^*(-t)\right]dt, \; 0\le z\le 1 \tag{18}$$

munosabat kelib chiqadi.

(18) tenglikda (7), (8) shartlarni va yuqoridagi belgilashlarni e’tiborga olib,

$$\tau_1(z)+\tau_2(z)=\int_0^z\left[\nu_2(t)+g_1(-t)\right]dt+g_2(-z) \tag{19}$$

ifoda topiladi. Bu ifodada $z=y$ almashirish bajarsak,

$$\tau_1(y)+\tau_2(y)=\int_0^y\left[\nu_2(t)+g_1(-t)\right]dt+g_2(-y) \tag{20}$$

munosabat hosil bo‘ladi.

Endi (15) va (19) tengliklarning o‘ng tomonlarini tenglab, so‘ngra differensiallab va $z=x$ almashtirish bajarsak,

$$\nu_1(x)-\nu_2(x)=g_1(-x)-f_1(-x)+g_2'(-x)-f_2'(-x), \qquad 0<x<1 \tag{21}$$

kelib chiqadi.

D_0 sohada (2) tenglama va (4), (6) shartlarda $y\to+0$ limitga o‘tsak,

$$\tau_1''(x)=\nu_1(x),\ \ 0<x<1;\ \ \tau_1(0)=f_2(0)/2,\ \ \tau_1(1)=\alpha(0)\,f_2(0)/2+\varphi(0) \tag{22}$$

masalaga ega bo‘lamiz.

Hosil bo‘lgan bu chegaraviy masalada

$$z(x)=\tau_1(x)+\tau_1(0)(x-1)-\tau_1(1)x \tag{23}$$

almashtirish bajarsak, ushbu

$$z''(x)=\tau_1''(x)=\nu_1(x),\ z(0)=z(1)=0$$

bir jinsli masala hosil bo‘ladi. Oddiy differensial tenglamalar kursidan ma’lumki, Grin funksiyasi usuliga ko‘ra bu masalaning yechimi

$$z(x)=\int_0^1 G(x,t)\nu_1(t)dt \tag{24}$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda $G(x,t)=\begin{cases}(t-1)x, & 0\le x\le t,\\ (x-1)t, & t\le x\le 1\end{cases}$ – masalaning Grin funksiyasi.

(24) ni (23) tenglikka qo‘yib, ba’zi amallarni bajarsak,

$$\tau_1(x)=\int_0^1 G(x,t)\nu_1(t)dt+\psi_1(x),\ \ 0\le x\le 1 \tag{25}$$

kelib chiqadi, bu yerda $\psi_1(x)=\left[\left(\alpha(0)-1\right)f_2(0)/2+\varphi(0)\right]x+f_2(0)/2$.

Endi D_0 sohada BS_1 masalani qaraylik: D_0 sohada (2) tenglamaning $u(x,y)\in C\left(\overline{D_0}\right)\cap C_{x,y}^{2,1}\left(D_0\right)$ sinfga tegishli va (4), (5) chegaraviy hamda $u(x,0)=\tau_1(x)$, $0\le x\le 1$; $u(0,y)=\tau_2(y)$, $0\le y\le 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\tau_1(x)$ funksiya (25) formula bilan aniqlanadi.

Demak, u_{xx} - u_y = 0 tenglama uchun birinchi chegaraviy masalaning yechimi ko‘rinishiga asosan D_0 sohada (2) tenglama uchun qo‘yilgan masalaning yechimini[1]

$$u(x,y)=\int_0^y \tau_2(\eta)G_{1\xi}(x,y;0,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^y F(\eta)G_{1\xi}(x,y;1,\eta)d\eta+\int_0^1 \tau_1(\xi)G_1(x,y;\xi,0)d\xi \tag{26}$$

formula bilan yozish mumkin.

Bunda (4) shartga ko‘ra $F(\eta)=u(1,\eta)=\alpha(\eta)u(0,\eta)+\varphi(\eta)$ yoki $F(\eta)=\alpha(\eta)\tau_2(\eta)+\varphi(\eta)$ ekanligini e’tiborga olib, (26) ni x bo‘yicha differensiallab, so‘ngra $x\to 0$ da limitga o‘tsak,

$$\nu_2(y)=\int_0^y \tau_2(\eta)G_{1\xi x}(0,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y \alpha(\eta)\tau_2(\eta)G_{1\xi x}(0,y;1,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^1 \tau_1(\xi)G_{1x}(0,y;\xi,0)d\xi-\int_0^y \varphi(\eta)G_{1\xi x}(0,y;1,\eta)d\eta$$

kelib chiqadi. Oxirgi tenglikda $G_{1\xi x}=G_{2\eta}$, $G_{1x}=-G_{2\xi}$ ekanligidan

$$\nu_2(y)=\int_0^y \tau_2(\eta)G_{2\eta}(0,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y \alpha(\eta)\tau_2(\eta)G_{2\eta}(0,y;1,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^1 \tau_1(\xi)G_{2\xi}(0,y;\xi,0)d\xi-\int_0^y \varphi(\eta)G_{2\eta}(0,y;1,\eta)d\eta \tag{27}$$

hosil bo‘ladi, bu yerda

$$G_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(t-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(t-\eta)}\right]\right\},$$

$$G_2(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(t-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(t-\eta)}\right]\right\}.$$

Bunda (16), (21) va (25) munosabatlardan ushbu

$$\nu_1(x)=\nu_2(x)+\psi_2(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{28}$$

$$\tau_1(x)=\int_0^1 G(x,t)\nu_2(t)\,dt+\psi_3(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{29}$$

$$\tau_2(x)=\int_0^1 G(x,t)\nu_2(t)dt-\int_0^x \nu_2(t)dt+\psi_5(x),\quad 0\le x\le 1 \tag{30}$$

tengliklar kelib chiqadi, bu yerda

$$\psi_2(x)=g_1(-x)-f_1(-x)+g_2'(-x)-f_2'(-x),\ \psi_3(x)=\int_0^1 G(x,t)\psi_2(t)dt+\psi_1(x),$$

$$\psi_4(x)=-\int_0^x g_1(-t)dt-\int_0^x g_2'(-t)dt-f_2(0),\ \psi_5(x)=\psi_4(x)+\psi_3(x).$$

Endi (27) tenglikni o‘ng tarafini bo‘laklab integrallab, so‘ngra yuqoridagi munosabatlardan foydalansak,

$$\nu_2(y)=\int_0^y\left(\int_0^1 G_\eta(\eta,t)\nu_2(t)dt\right)G_2(0,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y \nu_2(\eta)G_2(0,y;0,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^y\left(\int_0^1 G(\eta,t)\nu_2(t)dt\right)\alpha'(\eta)G_2(0,y;1,\eta)d\eta+\int_0^y\left(\int_0^\eta \nu_2(t)dt\right)\alpha'(\eta)G_2(0,y;1,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^y\left(\int_0^1 G_\eta(\eta,t)\nu_2(t)dt\right)\alpha(\eta)G_2(0,y;1,\eta)d\eta+\int_0^y \nu_2(\eta)\alpha(\eta)G_2(0,y;1,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^1\left(\int_0^1 G_\xi(\xi,t)\nu_2(t)dt\right)G_2(0,y;\xi,0)d\xi+\psi_6(y) \tag{31}$$

hosil bo‘ladi, bu yerda

$$\psi_6(y)=\int_0^y \psi_5'(\eta)G_2(0,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y \alpha'(\eta)\psi_5(\eta)G_2(0,y;1,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^y \psi_5'(\eta)\alpha(\eta)G_2(0,y;1,\eta)d\eta-\int_0^1 \psi_3'(\xi)G_2(0,y;\xi,0)d\xi-\int_0^y \varphi'(\eta)G_2(0,y;1,\eta)d\eta.$$

(31) tenglikda integralash tartibini o‘zgartirib, ba’zi hisoblashlarni bajarib, $\nu_2(y)$ noma’lum funksyaga nisbatan

$$\nu_2(y)=\int_0^1 \nu_2(t)K_3(y,t)dt+\psi_6(y), \tag{32}$$

2-tur Fredgolm integral tenglamasi hosil bo‘ladi, bu yerda $K_3(y,t)$ – integral tenglama yadrosi,

$$K_3(y,t)=\begin{cases}K_1(y,t)+K_2(y,t), & 0\le t\le y,\\ K_1(y,t), & y\le t\le 1,\end{cases}$$

$$K_1(y,t)=\int_0^y\big(G_\eta(\eta,t)G_2(0,y;0,\eta)-G(\eta,t)\alpha'(\eta)G_2(0,y;1,\eta)-$$

$$-G_\eta(\eta,t)\alpha(\eta)G_2(0,y;1,\eta)\big)d\eta-\int_0^1 G_\xi(\xi,t)G_2(0,y;\xi,0)d\xi,$$

$$K_2(y,t)=\int_t^y \alpha'(\eta)G_2(0,y;1,\eta)d\eta+\alpha(t)G_2(0,y;1,t)-G_2(0,y;0,t).$$

Masala yechimining yagonaligini ekstremum prinsipi yordamida isbotlaymiz. Buning uchun bir jinsli nolokal masalani qaraymiz, ya'ni

$$\varphi(y)\equiv f_1(y)\equiv f_2(y)\equiv g_1(x)\equiv g_2(x)\equiv 0. \tag{33}$$

bo'lsin.

1-teorema. Agar (33) bajarilsa, u holda nolokal masalaning $u(x,y)$ yechimi o'zining musbat maksimum (manfiy minimum)iga yopiq $\bar{D}_0$ sohaning $\overline{OA_1}\cup\overline{A_0B_1}$ chegarasida erishadi.

Parabolik tipdagi tenglamalar uchun ma'lum bo'lgan ekstremum prinsipiga asosan (1) tenglamaning $u(x,y)$ yechimi D_0 sohaning ichki nuqtalarida o'zining musbat maksimum (manfiy minimum)iga erishmaydi. (1) tenglamaning $u(x,y)$ yechimi OB_1 intervalning ichki nuqtalarida o'zining musbat maksimumiga (manfiy minimumiga) erishmasligini ko'rsatamiz. Buning uchun teskarisini faraz qilamiz. $u(x,y)$ funksiya OB_1 intervalning biron $E(x_0,0)\in OB_1$ nuqtasida o'zining musbat maksimum (manfiy minimum)iga erishsin.

(33) ga ko'ra (16), (29) va (30) munosabatlardan

$$\left.\begin{aligned}
\tau_1(x_0)+\tau_2(x_0)&=\int_0^{x_0}\nu_1(t)dt\\
\tau_1(x_0)&=\int_0^1 G(x_0,t)\nu_2(t)\,dt\\
\tau_2(x_0)&=\int_0^1 G(x_0,t)\nu_2(t)dt-\int_0^{x_0}\nu_2(t)dt
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

$E(x_0,0)$ nuqtada $\tau_1(x_0)>0\ (\tau_1(x_0)<0),\ \tau_1'(x_0)=0$ va (34) tenglikdan

$$\tau_2(x_0)>0\ (\tau_2(x_0)<0),\ \ \nu_2(x_0)<0\ (\nu_2(x_0)>0),\ \ \nu_1(x_0)>0\ (\nu_1(x_0)<0) \tag{35}$$

tengsizlikni olamiz.

Ikkinchi tomondan $E(x_0,0)$ nuqtada $\tau_1''(x_0)<0\ (\tau_1''(x_0)>0)$ shartga ko'ra, $\tau_1''(x)=\nu_1(x)$ tenglikdan quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$\nu_1(x_0)<0\ (\nu_1(x_0)>0).$$

Bu tengsizlik nolokal masalaning 2) shartiga asosan (35) tengsizlikka ziddir. Demak, $u(x,y)$ funksiya OB_1 intervalning ichki nuqtalarida o'zining musbat maksimum (manfiy minimum)iga erishmaydi.

Shunday qilib, nolokal masalaning $u(x,y)$ yechimi o'zining musbat maksimum (manfiy minimum)iga yopiq $\bar{D}_0$ sohaning $\overline{OA_1}\cup\overline{A_0B_1}$ chegarasida erishadi.

2-teorema. Qo'yilgan nolokal masalaning yechimi yagonadir.

Buning uchun bir jinsli masala faqat trivial yechimga ega ekanligini koʻrsatish kerak. Bunda 1-teoremaga koʻra (33) ni e’tiborga olib, yopiq $\overline{D}_0$ sohada $u(x,y)\equiv 0$ tenglikka ega boʻlamiz. $D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$ sohada (1) tenglama uchun qoʻyilgan Koshi masalasi yechimining yagonaligiga asosan yopiq $\overline{D_1}\cup\overline{D_2}\cup\overline{D_3}\cup\overline{D_4}$ sohada $u(x,y)\equiv 0$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, yopiq $\overline{D}$ sohada $u(x,y)\equiv 0$.

Bundan, D sohada nolokal masala yechimining yagonaligi kelib chiqadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. А.Қ.Ўринов. Параболо-гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. - Ташкент: Наврўз, 2016, 216 бет.
2. Уринов А.К., Хайдаров И.У. Задачи для параболо гиперболигеских уравнений со спектральным параметром. Ташкент: MUMTOZ SO’Z, 2018, 108 с.
3. Уринов А.К., Маманазаров А.О. Задачи с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа // Вестник НУУз. 2017. № 2/2. –С. 227-238.
4. Уринов А.К., Нишонова Ш.Т. Задача с интегральными условиями для эллиптико-параболического уравнения // Математические заметки. 2017. Т.102. вып.1. – С. 81-95.
5. Уринов А.К., Хайдаров И.У. Краевая задача с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Узбекский математический журнал. 2010. №3. – С.144-153.
6. Уринов А.К., Халилов К.С. Задача с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения // Научные ведомости БелГУ. Серия: Матем. Физика. – Белгород. 2015. №17(214). вып.40. – С. 143-146.
7. Уринов А.К., Халилов К.С. Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. – Ташкент. 2014. №2. – С. 6-9.
8. Уринов А.К., Халилов К.С. Задачи с нелокальными условиями для параболо-гиперболического уравнения // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. – Ташкент. 2014. №5. – С. 8-10.
9. Уринов А.К., Халилов К.С. Нелокальная задача для одного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с сингулярным коэффициентом // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа», 04-05 ноября 2021 г. Бухара. – С. 271-272.
10. Уринов А.К., Халилов К.С. О некоторых неклассических задачах для одного класса параболо-гиперболических уравнений // Доклады АМАН. – Нальчик. 2014. Т.16. № 4. – С. 42-49.
11. Уринов А.К., Халилов К.С. Об одной нелокальной задаче для параболо-гиперболических уравнений // Доклады АМАН. – Нальчик. 2013. Т.15. №1. – С. 24-30.
12. Уринов А.К., Халилов К.С. Об одной нелокальной задаче для параболо-гиперболического уравнения // Тезисы докладов III Международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического

анализа и их приложения III». 02-06 июня 2013 г. Ростов на Дону, Россия. 2013. – С. 86-87.

13. Mamanazarov A.O. A nonlocal problem for a parabolic hyperbolic equation with singular coefficients // Uzbek Math. Journal. 2021, Volume 65, Issue 1, pp.118-136.

14. Urinov A.K., Khalilov K.S. A Nonlocal Problem for a Third Order Parabolic-Hyperbolic Equation with a Singular Coefficient // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2022. Vol.15. Issue 4. – pp. 467-481. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-4-467-481.

15. Urinov A.K., Mamanazarov A.O. A problem with integral condition for a parabolic-hyperbolic equation with non-characteristic line of type changing // Contemporary Analysis and Applied Mathematics, Vol.3, No.2, 170-183, Turkey, Istanbul, 2015.