ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Г. Х. Джумабаев
Доцент Чирчикский государственный педгогический университет,

И. К. Хайдаров
Доцент Чирчикский государственный педгогический университет

АННОТАЦИЯ
В статье рассматривается одна краевая задача для систем параболического типа, состоящие из двух дифференциальных уравнений для определения температуры компонентов хлопка–сырца при сушки в сушильных установках. Построены приближенное решение метода Галеркина рассматриваемой задачи. Установлена, устойчивость метода Галеркина для приближенного решения рассматриваемой задачи при условии сильно минимальности координатной системы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: математическая модель, алгоритм, температура, координатная система, монотонность, устойчивость, сильно минимальность

ВВЕДЕНИЕ. Комком называется хлопок-сырец, имеющий небольшой объем и форму шара. В процессе сушки в комке влажного хлопка-сырца происходит сложно-нестационарный тепло-массообменный процесс, определяющими внешнее и внутреннее состояния. Внешние процессы характеризуются массообменном с поверхности комка в окружающую среду и теплообменом между волокном и средой. Важное значение для сохранения качества волокна и семян во время сушки имеет темп распространения тепла в комке хлопка-сырца [1-5].

Задачу тепло и массообмена в комке хлопка-сырца можно выразить
в виде системы дифференциальных уравнений параболического типа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial \tau} = a_1\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right) + \dfrac{\alpha}{c_1\rho_1}\left[u_2 - u_1\right] + \dfrac{1}{c_1\rho_1} f_1(\tau) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial \tau} = a_2\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial r}\right) + \dfrac{\alpha}{c_2\rho_2}\left[u_1 - u_2\right] + \dfrac{1}{c_2\rho_2} f_2(\tau) \end{cases} \qquad (1)$$

с начальными

$$u_1(r, 0)=g_1(r),\ u_2(r,0)=g_2(r), \qquad (2)$$

и граничными условиями: при $r=R$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial r}+\alpha_1\left[u_B-u_1\right]=0$$
$$-\frac{\partial u_2}{\partial r}+\alpha_2\left[u_B-u_2\right]=0 \qquad (3)$$

где α_1- коэффициент теплообмена между семенем и теплоносителем; α_2- коэффициент теплообмена между волокном и теплоносителем; α- коэффициент теплообмена между семенем и волокном; $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$- заданные непрерывные функции описывающие процесс испарения влаги из семени и из волокна, соответственно, u_B- температура воздуха, τ- время процесса сушки; $u_1(r, \tau)$, $u_2(r,\tau)$- искомые функции представляющие температуру семени и волокна в точке r в данный момент времени τ.
Сделав замену переменных

$$\theta_i(r,\tau)=r\cdot u_i(r,\tau), \qquad i=1,2$$

получим систему уравнений в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial\tau}=a_1\dfrac{\partial\theta_1^2}{\partial r^2}+\tilde{\alpha}\left(\theta_2-\theta_1\right)+\dfrac{1}{c_1\rho_1}rf_1(\tau)\\ \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\tau}=a_2\dfrac{\partial\theta_2}{\partial r^2}+\tilde{\alpha}\left(\theta_1-\theta_2\right)+\dfrac{1}{c_2\rho_2}rf_2(\tau)\end{cases} \qquad (4)$$

с начальными условиями

$$\theta_1(r,0)=r\cdot g_1(r), \qquad \theta_2(r,0)=r\cdot g_2(r) \qquad (5)$$

и граничными условиями при $r=R$

$$-\frac{\partial\theta_1(R,\tau)}{\partial r}+\frac{1}{R}\cdot\theta_1(R,\tau)+\alpha_1\left(u_B-\theta_2(R,\tau)\right)=0$$
$$-\frac{\partial\theta_2(R,\tau)}{\partial r}+\frac{1}{R}\cdot\theta_2(R,\tau)+\alpha_2\left(u_B-\theta_2(R,\tau)\right)=0 \qquad (6)$$

где $\tau\in[0;T]$, $r\in[0;R]$.

Для решения этой задачи воспользуемся проекционным методом Бубнова-Галеркина, т.е. введём базисную функцию $\varphi_i(x)$ удовлетворяющую условию сопряженности $\varphi_i(0)=0$, $\varphi_i(r)\in W_2^1(0,R)$. Тогда решение систему (4) – (6) будем искать в виде [6-10].

$$\theta_{iN}(r,\tau)=\sum_{K=1}^{N}a_{iK}(\tau)\cdot\varphi_K(r) \qquad (i=1,2) \qquad (7)$$

где коэффициенты $a_i(\tau)$ $(i=1,2)$ определяются из

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial\theta_{1N}}{\partial\tau} - a_1\frac{\partial^2\theta_{1N}}{\partial r^2} - \frac{\alpha}{c_1\rho_1}(\theta_{2N}-\theta_{1N}) - \frac{1}{c_1\rho_1} r\cdot f_1(\tau), \varphi(r)\right)_2 = 0 \\ \left(\frac{\partial\theta_{2N}}{\partial\tau} - a_2\frac{\partial^2\theta_{2N}}{\partial r^2} - \frac{\alpha}{c_2\rho_2}(\theta_{1N}-\theta_{2N}) - \frac{1}{c_2\rho_2} r\cdot f_2(\tau), \varphi(r)\right)_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Обозначая через

$$\alpha_{ik} = (\varphi_i(r), \varphi_j(r))_2;$$

$$\beta_{ik} = a_1(\varphi_i'(r), \varphi_k'(r))_2 + a_1\left(\frac{I}{R} - H_1\right)\varphi_i(R)\cdot\varphi_k(R) + H_3\cdot\alpha_{ik};$$

$$\overline{\beta}_{ik} = a_2(\varphi_i'(r), \varphi_k'(r))_2 + a_2\left(\frac{I}{R} - H_2\right)\varphi_i(R)\cdot\varphi_k(R) + H_4\cdot\alpha_{ik};$$

$$\gamma_{ik} = H_3\cdot d_{ik}; \qquad \overline{\gamma}_{ik} = H_4\cdot d_{ik}$$

$$f_{1i} = (f_1(\tau)\cdot r, \varphi_i(r))_2 + a_1H_1R\, u_B\cdot\varphi_i(R)$$

$$f_{2i} = (f_2(\tau)\cdot r, \varphi_i(r))_2 + a_2H_2R\, u_B\cdot\varphi_i(R)$$

получаем следующую дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} Q_n\cdot\frac{dA_n(\tau)}{d\tau} + P_nA_{1n}(\tau) + G_nA_{2n}(\tau) = F_{1n}(\tau,r) \\ Q_n\cdot\frac{dB_n(\tau)}{d\tau} + \tilde{P}_nA_{2n}(\tau) + \tilde{G}_nA_{1n}(\tau) = F_{2n}(\tau,r) \\ Q_nA_n(0) = F_{10}(r) \\ Q_nB_n(0) = F_{20}(r) \end{cases} \quad (9)$$

где $Q_n=(\alpha_{ik})$, $P_n=(\beta_{ik})$, $G_n=(\gamma_{ik})$, $\tilde{P}_n = (\tilde{\beta}_{ik})$ и $\tilde{G}_n = (\tilde{\gamma}_{ik})$ квадратные матрицы размером *(NxN);*

$A_{1n}(\tau)=(a_{11}(\tau), a_{12}(\tau), \ldots, a_{1n}(\tau))^T$, $A_{2n}(\tau)=(a_{21}(\tau), a_{22}(\tau), \ldots, a_{2n}(\tau))^T$ – искомые векторы;

$F_{1n}(\tau,r)=(f_{11}(\tau,r), f_{12}(\tau,r), \ldots, f_{1n}(\tau,r))^T$, $F_{2n}(\tau,r)=(f_{21}(\tau,r), f_{22}(\tau,r), \ldots, f_{2n}(\tau,r))^T$ известные векторы, элементы которые определяются по выше указанным формулам;

элементы векторов $F_{10}(r)=(f_{01}(r), f_{02}(r), \ldots, f_{0n}(r))^T$ и $F_{20}(r) = (\tilde{f}_{01}(r), \tilde{f}_{02}(r), \ldots, \tilde{f}_{0n}(r))^T$ определяются из соотношении $f_{0i} = (rg_1(r), \varphi_i(r))$, $\tilde{f}_{0i} = (rg_2(r), \varphi_i(r))$.

Исследуем вопрос об устойчивости задачи (9). Допустим, что координатная система $\{\varphi_i(x)\}$ сильно минимальна в пространстве $L_2(\Omega)$ т.е. существует такая постоянная независимая от *n*, что $0 < q < q_i^n$, где q_i^n - собственные числа матрицы [11-13].

$$Q_n = \{(\varphi_k, \varphi_j)\}_{k,\, j=1}^{n}$$

Предположим, что вместо системы Галеркина (9) мы решаем «возмущенную» систему

$$\begin{cases}(Q_n+\Gamma_n)\tilde{C}_n(\tau)+(P_n+\Gamma'_n)\tilde{C}_n=F_n(\tau)+\varepsilon_n\\(Q_n+\Gamma^0_n)\tilde{C}_n(0)=F_0+\varepsilon_0\end{cases} \tag{10}$$

где $\tilde{C}_n(\tau)=(\tilde{A}_{1n}(\tau);\tilde{A}_{2n}(\tau))$ - решение возмущенной задачи.

Процесс Галеркина для задачи (4) - (6) называется устойчивым, если существует такие независящие от *n* положительные постоянные p_i, что для достаточно малых норм матриц $\|\Gamma^0_n\|$, $\|\Gamma_n\|$, $\|\Gamma'_n\|$ и норм векторов $\|\varepsilon_0\|$, $\|\varepsilon_n\|$

$$\left\|\tilde{C}_n(\tau)-C_n(\tau)\right\|_{E_n}\le p_0\|\varepsilon_0\|+p_1\|\varepsilon_n\|+p_2\|\Gamma^0_n\|+p_3\|\Gamma_n\|+p_4\|\Gamma'_n\| \tag{11}$$

Приближенное решение $U(r,\tau)=(\theta_{1n},\ \theta_{2n}(r,\tau))^T$ системы (4)-(6) называется устойчивым в пространстве $L_2(\Omega)$, если имеет место неравенство, аналогичное (11), для разности $\left\|\tilde{U}(r,\tau)-U(r,\tau)\right\|$,

где $\tilde{U}(r,\tau)=(\tilde{\theta}_{1n}(r,\tau),\tilde{\theta}_{2n}(r,\tau))^T$, $\quad \tilde{\theta}_{in}(r,\tau)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_{iK}(\tau)\cdot\varphi_K(r)$

Умножая каждое из уравнений системы (8) на соответствующие $a_{1i}(\tau)$, $a_{2i}(\tau)$ и сделав аналогичные выкладки, можно установить непрерывную зависимость приближенных решений от исходных данных и правых частей в виде [14-17]:

$$\begin{cases}\|\theta_{1n}\|_2^2+\int_0^\tau\|\nabla\theta_{1n}\|_2^2\le p_1\left[u_B^2+\|g_1(r)\|_2^2+\|g_2(r)\|_2^2+\int_0^\tau f_1^2(\tau)d\tau+\int_0^\tau f_2^2(\tau)d\tau\right]\\\|\theta_{2n}\|_2^2+\int_0^\tau\|\nabla\theta_{2n}\|_2^2\le p_2\left[u_B^2+\|g_2(r)\|_2^2+\|g_1(r)\|_2^2+\int_0^\tau f_1^2(\tau)d\tau+\int_0^\tau f_2^2(\tau)d\tau\right]\end{cases} \tag{12}$$

Кроме того, учитывая непрерывности заданных функции и воспользуюсь теоремой о среднем значении можно оценить

$$\|\theta_{1n}\|^2+\int_0^\tau\|\nabla\theta_{1n}\|^2\le M_1,\qquad \|\theta_{2n}\|^2+\int_0^\tau\|\nabla\theta_{2n}\|^2\le M_2$$

Отсюда, используя сильную минимальность базисных функций в $L_2(\Omega)$, мож-но получить следующих неравенств:

$$\|G_n(\tau)\|_{E_n}^2\le\frac{1}{q}\|U(r,\tau)\|_{L_2(\Omega)}^2\le M\ ,\quad \int_0^\tau\left\|\dot{G}_n(\tau)\right\|_{E_n}^2d\tau'\le\frac{1}{q}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial U(r,\tau)}{\partial\tau}\right\|_{L_2(\Omega)}^2d\tau'\le K, \tag{13}$$

где $G_n(\tau)=(a_{1i}(\tau),\ a_{2i}(\tau))^T$

Пусть допущенные погрешности Γ_n, Γ'_n таковы

$$\|\Gamma_n\|\le e_1q,\quad \|\Gamma'_n\|\le e_2q;\quad 0\le e_i\le 1,\quad q>0. \tag{14}$$

Обозначим через $Z_n(\tau)=\widetilde{G}_n(\tau)-G_n(\tau)$. Из системы уравнений (10) вычтем системы уравнений (9). Полученное уравнение умножим скалярно на $\dot{Z}_n(\tau)$, т.е.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left((Q_n+\Gamma_n)Z_n,\ Z_n\right)+\left((P_n+\Gamma'_n)Z_n,\ \dot{Z}_n\right)=\left(\varepsilon_n,\ \dot{Z}_n\right)+\left(\Phi_n,\ \dot{Z}_n\right) \qquad (15)$$

где $\Phi_n(\tau)=-\Gamma_n\cdot\dot{G}(\tau)-\Gamma'_n\ G_n(\tau)$.

Так как матрица P_n положительно определена, то

$$\left((P_n+\Gamma'_n)Z_n,\ \dot{Z}_n\right)_n\geq 0.$$

Тогда, оценивая члены правой части равенства

$$\left|\left(\varepsilon_n,\dot{Z}_n\right)_{E_n}\right|\leq\frac{1}{2\varepsilon_1}\|\varepsilon_n\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon_1\|Z_n\|^2$$

и
$$\left|\left(\Phi_n(\tau),\ \dot{Z}_n\right)\right|\leq\frac{1}{2\varepsilon_1}\|\Phi_n(\tau)\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon_1\|Z_n\|^2$$

получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left((Q_n+\Gamma_n)Z_n,\ Z_n\right)\leq\varepsilon_1\|Z_n\|^2+c_1\left(\|\varepsilon_n\|^2+\|\Phi_n(\tau)\|^2\right)$$

Проинтегрируем последнее неравенств по τ. Принимая во внимание неравенство

$$\|Z_n\|^2_{E_n}\leq\frac{1}{2}\|\widetilde{U}-U\|^2_{L_2}$$

получим

$$\left((Q_n+\Gamma_n)Z_n,\ Z_n\right)_{E_n}\leq 2\varepsilon_1\int_0^\tau\|\widetilde{U}-U\|^2_{L_2}\,d\tau+c_1\int_0^\tau\left(\|\varepsilon_n\|^2+\|\Phi_n(\tau)\|^2_{L_2}\right)d\tau+\left((Q_n+\Gamma_n)Z_n(0),\ Z_n(0)\right)_{E_n} \quad (16)$$

С другой стороны, в силу предположения (14) получим

$$\left((Q_n+\Gamma_n)Z_n,\ Z_n\right)_{E_n}\geq\left(Q_nZ_n,\ Z_n\right)-e_1q\|Z_n\|^2_{E_n}\geq(1-e_1)\|\widetilde{U}_n-U_n\|^2_{L_2},$$

$$\left((Q_n+\Gamma_n)Z_n(0),\ Z_n(0)\right)_{E_n}\leq\left(Q_nZ_n(0),\ Z_n(0)\right)_{E_n}+e_1q\|Z_n\|^2_{E_n}\leq c_2(1+e_1)\|\widetilde{U}(r,\ 0)-U(r,\ 0)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\int_0^\tau\|\Phi_n(\tau)\|^2_{E_n}\,d\tau'\leq 2M\int\|\Gamma_n\|^2\,d\tau'+2K\int_0^\tau\|\Gamma'_n\|^2\,d\tau'\leq 2MT\|\Gamma_n\|^2+2KT\|\Gamma'_n\|^2_{E_n}$$

Обозначим $$\int_0^\tau\|\widetilde{U}_n(r,\ \tau)-\dot{U}_n(r,\ \tau)\|^2_{L_2}\,d\tau=y(\tau)$$

$$F_n(\tau)=c_2(1+e_1)\|\widetilde{U}_n(r,\ 0)-U_n(r,\ 0)\|^2_2+c_1\|\varepsilon_n\|^2_{E_n}+2MT\|\Gamma_n\|^2_{E_n}+2KT\|\Gamma'_n\|^2_{E_n}$$

Тогда подставив все оценки в (16) получим дифференциальное неравенство для $y_n(\tau)$, т.е.

$$\frac{dy_n(\tau)}{d\tau} \leq M \cdot y_n(\tau) + F_n(\tau)$$

из которого в свою очередь в силу теоремы о дифференциальных неравенствах следует неравенство

$$\frac{dy_n(\tau)}{d\tau} \leq e^{G_1\tau} \cdot F(\tau)$$

Отсюда, используя оценки (5), полученных для начальных условии имеем:

$$\left\|\tilde{U}_n(r,\tau) - U_n(x,\tau)\right\|_2^2 \leq p_0\|\varepsilon_0\|^2 + p_1\|\varepsilon_n\|^2 + p_2\left\|\Gamma_n^0\right\|^2 + p_3\left\|\Gamma_n'\right\|^2 + p_4\left\|\Gamma_n'\right\|^2 \tag{17}$$

где постоянные $p_i\left(i = \overline{0,4}\right)$ не зависят от N. Следовательно,

$$\left\|\tilde{G}_n(\tau) - G_n(\tau)\right\|_{E_n}^2 \leq \frac{1}{q}\left\|\tilde{U}_n(r,\tau) - U_n(r,\tau)\right\|_2^2 \leq \frac{1}{q}\omega^2$$

где ω^2- есть правая часть неравенства (17). Из последних соотношений вытекает устойчивости алгоритма построения приближенного решения и численной устойчивости приближенного решения в $L_2(\Omega)$.

ВЫВОД

Построены приближенное решение краевой задачи уравнений параболического типа. Установлена, устойчивость метода Галеркина для приближенного решения рассматриваемой задачи при условии сильно минимальности координатной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маматов А.З., Джумабаев Г. Существование и единственность обобщенного решения одной задачи параболического типа с дивергентной главной частью// ACADEMIC RESEARCH IN EDUCATIONAL SCIENCES. Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723 DOI: 10.24412/2181-1385-2021-6-1260-1266.
2. А.З.Маматов, Г.Х.Джумабаев, Об оценке погрешности приближенного решения для задачи параболического типа, когда граничное условие содержит производную по времени от искомой функции// Eurasian journal of mathematical theory and computer sciences. Volume 2 Issue 3, March 2022 ISSN 2181-2861 C 5-9.
3. Mamatov, A.Z., Usmankulov, A.K., Abbazov, I.Z., Norboyev, U.A., Mukhametshina, E.T. Determination of Temperature of Components of Cotton-Raw Material in a Drum Dryer with a Constant. IOP Conference Series: Earth and Environmental Sciencethis link is disabled, 2021, 939(1), 012052
4. Douglas J Jr, Dupont T. Galerkin methods for parabolic equations with nonlinear foundry conditions// NumerMalh.- 1973, 20, p. 213-237

5. Dench J. E., Jr, Galerking methods for some highly nonlinear problems// SIAM Numer anal, 1977, 14, p. 327-434.
6. Jutchell L. A Galerken method for nonlinear parabolic equations with nonlinear boundary conchtions// SIAM J Numer anal 1979, 16, p. 254-299
7. Маматов А.З. Применения метода Галеркина к некоторому квазилинейному уравнению параболического типа// Вестник ЛГУ,-1981.-№13.-С.37-45.
8. Маматов А.З., Джумабаев Г. Об одной задаче параболического типа с дивергентной главной частью// 53 междр. Научно практичес. конф., ВГТУ, Витебск, Р. Беларусс».-2020 г.
9. Маматов А.З., Бахрамов С. Приближенное решение метода Галеркина квазилинейного уравнения с граничным условием, содержащий производную по времени от искомой функции// Узбекистон -Малазия межд. научная онлайн конференция, Уз.НУ, 24-25 август 2020 й., 239 с.
10. Djumabaev G., Jumaniyazov K., Matismailov S.L. «Research of influence of thread guiders with flexible elements for the process of yarn formation» European science review Vienna 2018. November.
11. K.Djumaniyazov, G.Djumabaev, N.Juraeva, A.Xurramov “Analysis of Vibrations of the Rings of the Internal Spinning Machine” Cite as: AIP Conference Proceedings 2402, 070046 (2021); https://doi.org/10.1063/5.0072022 Published Online: 15 November 2021
12. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.-Наука,-1967.-736 С.
13. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.-Наука,-1973.-576 С.
14. Wheeler M.F. A priori error estimates for Galerkin approximation to parabolic partial differential equations. SIAM J. Numer. Anal.1973.-10.-P.723-759.
15. Mamatov A.Z., Djumabaev G. On estimation of the error of an approximate solution for a parabolic type problem when the boundary condition contains the time derivative of the desired function // Eurasian journal of mathematical theory and computer sciences. Volume 2 Issue 3, March 2022 ISSN 2181-2861 pp 5-9.