European Journal of Interdisciplinary Research and Development
Volume-16 June 2023
Website: www.ejird.journalspark.org ISSN (E): 2720-5746

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГИХ ДВУХСЛОЙНЫХ СРЕДАХ

1З.И. Болтаев.,
2С.Ж. Собиров.,
2Т.Р.Р Рузиев,
3М.А.Рузиева
1 Бухарский инженерно-технологический институт
2Бухарский государственный педагогический институт
sobirovsobir5678@gmail.com,Ruzievtulkin@gmail.com.

Аннотация
Рассматривается задача распространения сдвиговых волн в вязкоупругой неоднородной двухслойной среде, когда один слой экспоненциально- неоднородный, в частности, может быт однородный вязкоупругий. Основной целью работы является разработка методики и алгоритма для решения задачи распространения волн в слоистых средах. Для математической постановки задачи использовано уравнение Ламе и соответствующие граничные условия. Исследовано полученное дисперсионное уравнение, описывающее соотношение между частотой и волновым числом. Уравнение дисспесионнных сотношений решается численно, методом Мюллера. Для диссипативно-неоднородных механических систем обнаружено, что существует конечное число волн, если скорость распространения сдвиговой волны больше скорости объёмной волны первого слоя. Также установлено, что не существуют сдвиговые волны, распространяющиеся со скоростью меньшей минимума скорости объёмной волны первого слоя. Для вязкоупругого материала получено частотное уравнение типа Похгаммера и определена дисперсия комплексной фазовой скорости. Вязкоупругие свойства материала описаны с помощью ядра наследственности Ржаницына – Колтунова. Оценены демпфирующие свойства конструкции.

Ключевые слова: волна, слой, свободная граница, контактные условия, дисперсионные соотношения.

1. Введение

Закономерности распространения волн в деформируемых волноводах представляют значительный интерес для многих областей науки и техники. Их исследования составляет предметы динамики и прочностии машин, а также теории колебаний и волн, получившие в настоящее время широкое применение и развитие. Поэтому исследование распространения волн деформируемого волноводе является актуальной задачей механики.

Задаче распространения волн в упругом волноводе посвящены работы [1,2]. Задаче распространения упругих волн в многослойной среде посвящены работы [3,4,4,6] и др. В отличие от упругих волноводов, дисперсионные уравнения в наследственно – упругих волноводах изучены недостаточно. Учет демпфирующей способности материала волновода играет огромную роль в динамическом поведении конструкции [7,8,9,10]. Она приводит к заметному ослаблению собственных колебаний, существенному понижению амплитуд при вынужденных колебаниях и сглаживанию напряжений в зоне концентрации при колебаниях. Оценить эту способность, можно лишь поняв природу поглощения энергии при колебаниях [11,12].

Имеется достаточно много точек зрения на этот механизм, т.е. гипотез или теорий внутреннего трения, причем значительный период здесь доминировала гипотеза вязкого сопротивления, удобная в расчетах, но не подтверждаемая экспериментами для металлов. Например, в работе [13,14] рассматривается задача о распространении гармонических по времени волн в вязкоупругой пластинке переменной толщины. Для описания колебаний многослойного цилиндра применяются трехмерные уравнения теории упругости в цилиндрической системе координат. Асимптотический анализ для решения задачи распространения волн в слое применен в работах [15,16,17,18]. В этих работах для решения дисперсионного уравнения применяются численные методы. Анализируются дисперсионные кривые с комплексными параметрами. В работе [19] представлено замкнутое математическое изложение теории распространения монохроматических волн в вязкоупругих цилиндрических телах, в которой представлены аналитические решения и численные результаты фундаментальных задач распространения волн в произвольных линейных вязкоупругих средах. В статье [20] исследовано распространение волн в вязкоупругих полосах вида стержня.

2. Методы

2.1.Постановка задачи и методы решения

Исследуется задача распространения свободных затухающих волн на двухслойной среде (рис.1), где первый слой $\{x \in R, y \in [-h, 0]\}$ имеет операторную экспоненциальную неоднородность, а второй слой $\{x \in R, y \in [0, d]\}$ – однородный с операторными модулями сдвига

$$\tilde{\mu}_j[f(t)] = \mu_{0j}\left[[f(t)] - \int_{-\infty}^{t} R_\mu^{(i)}(t-\tau)[f(\tau)]d\tau\right], j = 1, 2. \qquad (1)$$

$f(t)$ –произвольная функция; $R_\mu^{(i)}(t-\tau)$-соответственно ядро релаксации 1-го и 2-го слоя; μ_{oj} − мгновений модуль сдвига; ρ_j- плотности 1-го и 2-го слоя соответственно; $j=1$− индекс соотношений, принадлежащих первому слою; $j=2$− индекс соотношений, принадлежащих второму слою; h и d− толщины первого и второго слоя соответственно.

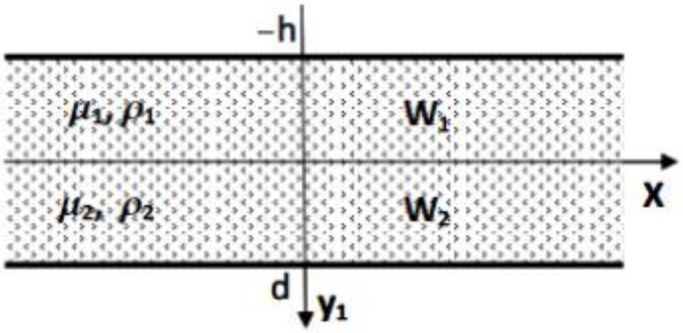

Рис.1. Расчетная схема двухслойного плоского тела (плоского волновода)

Предполагается, что модуль сдвига и плотность первого а также второго слоев меняются по толщине по закону

$$\tilde{\mu}_j(x,y)[f(t)] = \mu_{0j}e^{2\gamma_{\mu j}y}\left[[f(t)] - \int_{-\infty}^{t} R_{\mu}^{(i)}(t-\tau)[f(\tau)]d\tau\right], (j=1,2)$$
$$\rho_j(x,y) = \rho_{j0}e^{2\gamma_{\rho j}y}, \qquad y\in[-h,0]\cup[0,d]. \tag{2}$$

Здесь $\rho_{j0}, \gamma_{\mu j}, \gamma_{\rho j}$ – постоянные величины.

Уравнение распространения чисто сдвиговых волн в первом и втором слоях имеет вид

$$\nabla^2 w_j + 2\gamma_j \frac{\partial w_j}{\partial y} - \int_{-\infty}^{t} R_{\mu j}(t-\tau)D_{\nabla j}(\tau)d\tau = \frac{1}{c_{sj}^2}\frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2}, \tag{3}$$

где ∇^2 – оператор Лапласа;

$$R_{\nabla j} = R_{\mu j}(t-\tau)(1+2\alpha_j),\ D_{\nabla j} = \nabla^2 w_j + 2\alpha_j\frac{\partial w_j}{\partial \tau^2}, c_{sj}^2 = \mu_{0j}/\rho_{j0}.$$

Для решения интегро-дифференциальных уравнений (3) необходимо ставить граничные условия. На границах $y=-h, y=d$ заданы условия свободной границы:

$$\frac{\partial w_1}{\partial y}\Big|_{y=-h} = 0,\quad \frac{\partial w_2}{\partial y}\Big|_{y=d} = 0. \tag{4}$$

На границе контакта слоев 1 и 2 принимается условия непрерывности перемещений и касательных напряжений:

$$w_1(x,0) = w_2(x,0),\ \sigma_{yz,1}(x,0) = \sigma_{yz,2}(x,0), \tag{5}$$

или с учетом закона Гука (5) принимает следующий вид

$$w_1(x,0) = w_2(x,0),$$
$$\mu_{01}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\Big|_{y=0} - \int_{-\infty}^{t} R_{\mu 1}(t-\tau)\frac{\partial w_1(\tau)}{\partial y}\Big|_{y=0}\right) =$$
$$= \mu_{02}\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\Big|_{y=0} - \int_{-\infty}^{t} R_{\mu 2}(t-\tau)\frac{\partial w_2(\tau)}{\partial y}\Big|_{y=0}\right).$$

Рассматривается анти-плоская задача, т.е. вектор перемещений представляется в виде

$$\vec{u}_j = \left[0, 0, w_j(x,y,t)\right]. \tag{6}$$

Требуется найти решение уравнений (4) и (5), удовлетворяющие граничным условиям (2) и (3).

Решение уравнения (4) представим в виде гармонической волны, распространяющейся в направлении оси x

$$w_j(x,y,t) = \left(A_j e^{k\nu_{1j}y} + B_j e^{k\nu_{2j}y}\right)e^{i(kx-\omega t)}, \tag{7}$$

где $A_j, B_j -$ интегральные постоянные, которые определяются из граничных условий (4) и (5);

$$\nu_{1,2j} = -\frac{\alpha_j}{k} \pm \sqrt{\frac{\alpha_j^2}{k^2} - \theta_j\eta_j + 1},\ \ \eta_j = \frac{\omega^2}{k^2 c_{s2j}^2 \Gamma_{kj}}, \theta_j = \frac{c_{s2j}^2}{c_{s1j}^2},$$

$$\Gamma_{kj} = 1 - \Gamma_{\mu j}^c - \Gamma_{\mu j}^s,$$

$$\Gamma_{\mu j}^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\mu j}(\tau)\cos\omega_R\tau\, d\tau, \Gamma_{\mu j}^s(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\mu j}(\tau)\sin\omega_R\tau\, d\tau -$$

соответственно косинус и синусоидальный образы материальной ядерной релаксации Фурье. В качестве ядра релаксации вязкоупругого материала выберем ядро Ржаницына-Колтунова с трехпараметрической слабой сингулярностью

$$R_{\lambda,\mu j}(t) = A_{\lambda,\mu j} e^{-\beta_{\lambda,\mu j} t} / t^{1-\alpha_{\lambda,\mu j}},$$

где A, α, β - материальные параметры $\omega_R -$ действительная величина [7].

Предполагается, что второй слой однородный и вязкоупругий, тогда $\alpha_2 = 0$, и решение уравнения (3) принимает вид

$$w_2 = (A_2 \sin k\sqrt{\eta_1 - 1}y + B_2 \cos k\sqrt{\eta_1 - 1}y)e^{i(kx-\omega t)}. \tag{5}$$

Для определения произвольных постояных $A_j, B_j -$ используем граничные условия (4) и (5), тогда получается однородные алгебраические уравнения, из условие существования нетривиального решения которой получим дисперсионное уравнение

$$[\Delta(\omega,k)]\{q\} = \{0\}, \tag{6}$$

где

$$[\Delta(\omega,k)] = \begin{bmatrix} \nu_1 e^{-k\nu_1 h} & \nu_2 e^{-k\nu_2 h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\sqrt{\eta - 1} & \sin k\sqrt{\eta - 1} \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ k\nu_1 & k\nu_2 & k\alpha\sqrt{\eta - 1} & 0 \end{bmatrix}, \alpha = \mu_{20} / \mu_{20},$$

$$\{q\} = \{A_1 \quad B_1 \quad A_2 \quad B_2\}^T.$$

Равенство нулю детерминанта системы приводит к уравнению, определяющему комплексную фазовую скорость волн

$$[\Delta(\omega,k)]=\begin{bmatrix} \nu_1 e^{-k\nu_1 h} & \nu_2 e^{-k\nu_2 h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\sqrt{\eta-1} & \sin k\sqrt{\eta-1} \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ k\nu_1 & k\nu_2 & k\alpha\sqrt{\eta-1} & 0 \end{bmatrix}=0. \qquad (7)$$

где $\omega=\omega_R+i\omega_I$ - комплексная частота. Корни характеристического уравнения (7) ищутся методом Мюллера, на каждой итерации метода Мюллера применяется метода Гаусса.

3. Результаты и анализ

Полученное частотное уравнение (7) численно решается с помощью программного комплекса MATLAB. Численные результаты получены при безразмерных параметрах. Во всех вариантах расчета приняты следующие безразмерные параметры слоев:
$E_{0j}=1, \rho_j=1, h=1, d=1, \ A=0{,}048; \quad \beta=0{,}05; \quad \alpha=0{,}10.$

Изменение реальной и мнимой части фазовой скорости $c_k=c_{Rk}+ic_{ik}$ от волнового числа приведено на рис. 2 и рис. 3. Для вычисления приняты: $\eta=\dfrac{\omega^2}{k^2c_{s2}^2\Gamma_{k2}}, \theta=\dfrac{c_{s2}^2}{c_{s1}^2}, \xi=kh, r=d/h, \gamma=\mu_{02}/\mu_{01}$. Из графиков рис.2 и рис.3 видно, что с увеличениям волнового числа соответствующие комплексные $\eta_k=\eta_{Rk}+i\eta_{ik}$ (реальные и мнимые части) частоты имеют предельные значения.
Ниже приведены результаты численных расчётов.

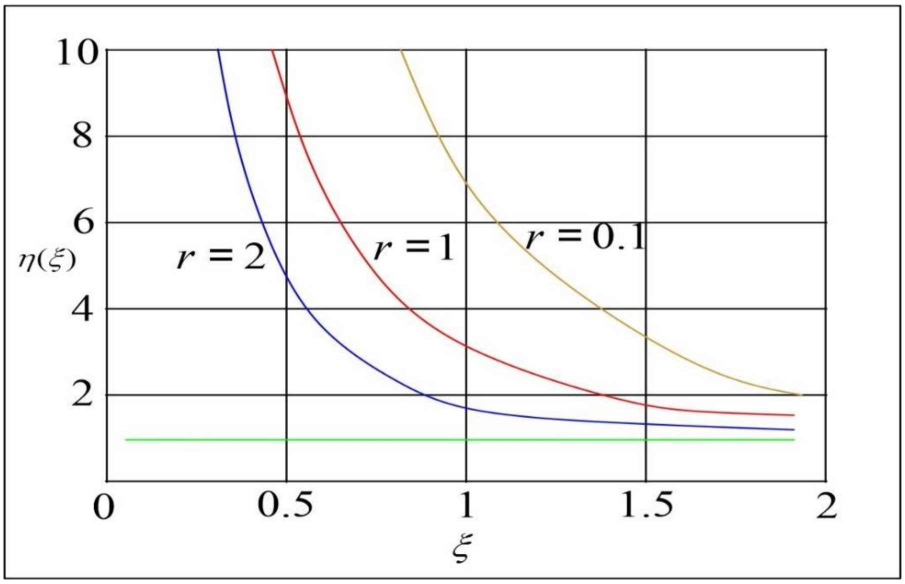

Рис.2. Зависимость $\eta(\xi)$ для однородных слоёв при разных значениях отношений толщин при : $\theta=1.6222,\ \lambda=0.8111, \in=0.$

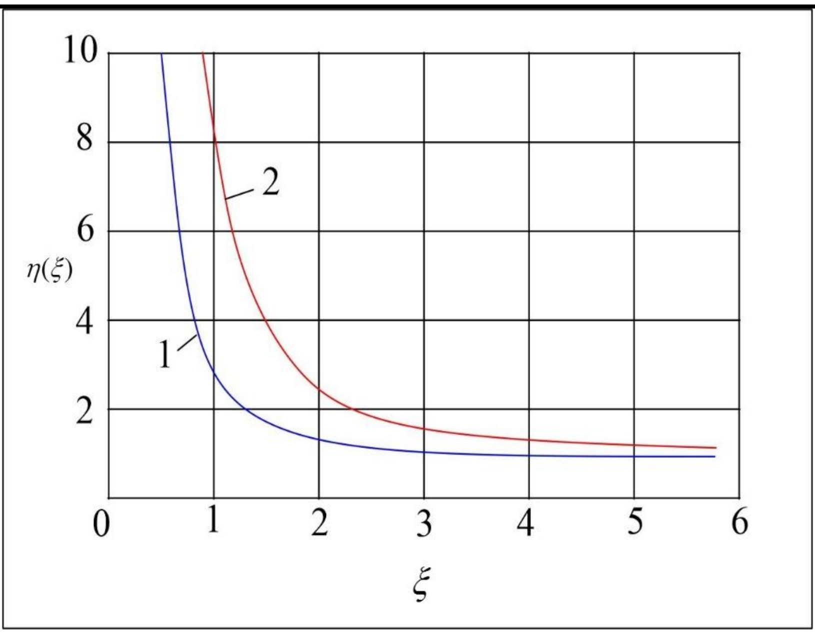

Рис. 3. Моды $\eta(\xi)$ для однородных слоёв: 1-я мода; 2-я мода,
($\theta = 1.6222,\ \lambda = 0.8111, r = 1, \in = 0.$)

Значения $\eta(\xi)$, на рис. 2, при увеличении ξ уменьшаются и становятся меньше единицы.

Заключения

Таким образом, распространение волн в двухслойных средах, когда первый слой неоднородный, а второй однородный, имеет следующие особенности:

1) число волн бесконечно, если реальные части скорости распространения сдвиговой волны больше реальной части скорости объёмной волны первого слоя (умноженной на $\sqrt{1+\gamma^2/k^2}$) и больше скорости объёмной волны второго слоя;

2) существует конечное число волн, если скорость реальной части распространения сдвиговой волны больше скорости объёмной волны первого слоя (умноженной на $\sqrt{1+\gamma^2/k^2}$) и меньше реальной части скорости распространения объёмной волны второго слоя;

3) не существует затухающих сдвиговых волн, распространяющихся со скоростью, меньшей минимума реальной части скорости объёмной волны первого слоя (умноженной на $\sqrt{1+\gamma^2/k^2}$), меньше скорости реальной части объёмной волны второго слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Микер Т., Мейтцлер А. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках. – Физ. Акустика. Принципы и методы. Пер. с англ. –1966. –1 А. – С. 140-203.
2.Комиссарова Г. Л., Радько В.П., Троицкий В.А., Давыдов Е.А. Распространение нормальных волн в трубах, дисперсионные характеристики нормальных волн. Неразрушающий контроль. 2008, №3.-С.14-20.
3. Jones J.P. Wave Propagationin a Two-Layered Medium.//Journal of Applied Mecha- nics. 1964. June. Pp.213-222.

4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342с.
5. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids. – North Holland, Amsterdam, 1973. – 440 p.
6. Погосян Н.Д., Саноян Ю.Г., Терзян С.А. Распространение сдвиговых волн в двухслойной среде в антиплоской постановке // Известия НАН Армении. 2013. - 64,- №4, - С.12-16.
7.Майборода В.П., Трояновский И.Е.,Сафаров И.И., Каталымова И.В.О затухании волн в двухслойной среде.- Динамические системы. 1985 , вып.4. -С.57-62.
8. Анофрикова Н.С., Сергееева Н.В. Исследование гармонических волн в наследственно-упругом слое.//Вестник Нижегородского университета. Сер. Математика. Механика.Информатика. –2014. –Т.14.вып.3. – С. 321-328.
9. Анофрикова Н.С., Сергеева Н.В. Численный анализ дисперсионных уравнений в случае наследственно - упругого сплошного цилиндра // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XVII Междунар. конф. (14-17 окт. 2014г.) в 2 т. Ростов н/Д : Изд-во Южн. федер. ун-та. 2014. 2014. Т.1. – С.44-48.
10. Анофрикова Н.С., Коссович Л.Ю., Черненко В.П. Асимптотические методы построения решений в окрестностях фронтов волн в вязкоупругом стержне при больших значениях времени // Изв. Сарат.ун.-та. Математика. Механика. Информатика. –2005. –Т.5. вып.1. – С. 82-88
11. Ватульян А.О., Юров В.О. О дисперсионных соотношениях для неоднородного волновода при наличии затухания //Изв. РАН МТТ .- 2016. -№5. - С. 85-93.
12. Вильде М.В., Сергеева Н.В. Развитие асимптотических методов анализа дисперсионных соотношений для наследственно – упругого сплошного цилиндра. Изв. Сарат. ун.та Нов.сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017,Т.17.вып.2. С.44-56.
13. Boltaev, Z., Safarov I and Razokov T 2020 Natural vibrations of spherical inhomogeneity in a viscoelastic mediumInt. J Sci Technol Res, pp.3674-3680. 14. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Волновое процессы в механическом волноводе. Основы, концепции, методы. Германия, LAP, Lambert Academic Publishing . 2012-220 p.
15. Ardazishvili, R. V. Three-dimensional surface wave for mixed boundary conditions on the surface// Proc. of Young Scientists School–Conference “MECHANICS-2013” (October 1–4, 2013, Tsaghkadzor, Armenia). — Institute of Mechanics of NAS of the Republic of Armenia, 2013. - P. 74–79.
16. Benatar A., Rittel D., Yarin A.L. Theoretical and experimental analysis of longitudinal wave propagation in cylindrical viscoelastic rods. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 51 (2003), 1413–1431
17. Fu, Y. B. Analysis of localized edge vibrations of cylindrical shells using the Stroh formalism / Y. B. Fu, J. Kaplunov // Math. Mech. Solids. - 2012. - Vol. 17, № 1. - P. 59–66.

18. Gavrilyuk, S. L., Makarenko, N.I., Sukhinin, S.V. Waves in Continuous Media. Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing, Springer International Publishing AG, 2017. – 140 p.
19. Safarov, I.I., Teshaev, M.K. and Ruziyev, T.R., Methods for Assessing the Seismic Resistance of Subterranean Hydro Structures under the Influence of Seismic Waves. World Wide Journal of Multidisciplinary Research and Development (WWJMRD) 2018; 4 (1): 128-139. Impact Factor MJIF, 4. 20. 20.Safarov, I. I., Sh, T. M. A. M., & Ruziyev, T. R. (2017). Application Of The Method Of Finite Element For Investigation Of The Dynamic Stress-deformed Condition Of Pipeline Sides When Exposed External Loods. Case Studies Journal ISSN (2305-509X)-Volume, 6, 38-45.
21. Kuldashev N. U. et al. Bending Vibrations Polymeric Pipes of Variable Section with Interference inside the Liquid //World Wide Journal of Multidisciplinary Research and Development. WWJMRD. – 2018. – №. 4 (2). – C. 72.
22. Sh A. M. et al. Spatial Oscillations Varied Viscoelastic Pipeline under AC Varied Internal Pressure //World Wide Journal of Multidisciplinary Research and Development. WWJMRD. – 2018. – №. 4. – C. 2.
22. Safarov I. I. et al. Stationary deformation of cylindrical shells with viscoelastic filler //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2022. – T. 2373. – №. 2. – C. 022038.
23. Boltayev Z. et al. On the action of normal moving load on a viscoelastic three-layer cylindrical shell //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2022. – T. 2647. – №. 1. – C. 030006.
24. Sharipovich, Akhmedov Maqsud, Nuriddinov Bakhtiyor Zafarovich, and Ruziyev Tulkin Razokovich. "Harmonic Oscillations of Spherical Bodies In a Viscoelastic Environment."
25. Zaripov N. N. USING METHODS OF FOREIGN EXPERIENCES IN TEACHING INFORMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES IN SCHOOL //Theoretical & Applied Science. – 2020. – №. 3. – C. 111-114.