European Journal of Interdisciplinary Research and Development
Volume-11 Jan. - 2023
Website: www.ejird.journalspark.org ISSN (E): 2720-5746

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОД КООРДИНАТ В РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Бахтиёр Зохирович Усмонов
Чирчикский Государственный педагогический университет,
г. Чирчик, Узбекистан, bakhtiyer.usmanov@mail.ru

Насиба Миллавоевна Ассоева
Чирчикский Государственный педагогический университет
Магистрант 2-курса. г. Чирчик, Узбекистан

Аннотация

в статье ракрыто возможностей решение геометрических задач методом координат. Решение задач координатным методом происходит по алгоритму, что в свою очередь, упрощает поиск и само решение задачи. Данный метод переносит в геометрию важную особенность алгебры – единообразие способов для решения той или иной задачи. В отличие от арифметики и элементарной геометрии, в алгебре и аналитической геометрии решение задач приводится по общему для всех задач плану, практически подходящему к любой задаче. Применение координатного метода для решения геометрических задач, избавляет от необходимости наглядного представления сложных пространственных изображений. Сущность метода координат как метода решения задач состоит в том, что, задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы можем решать геометрическую задачу средствами алгебры. Метод координат – это универсальный метод. Он обеспечивает тесную связь между алгеброй и геометрией, которые, соединяясь, дают «богатые плоды», какие они не могли бы дать, оставаясь разделенными.

Ключевые слова: система координат, параллелограм, ромб, плоскость, прямоугольная плоскость.

Abstract

The article reveals the possibilities of solving geometric problems by the method of coordinates. The solution of problems by the coordinate method occurs according to the algorithm, which in turn simplifies the search and the solution of the problem itself. This method transfers to geometry an important feature of algebra - the uniformity of methods for solving a particular problem. In contrast to arithmetic and elementary geometry, in algebra and analytical geometry, the solution of problems is given according to a plan common to all problems, practically suitable for any problem. The use of the coordinate method for solving geometric problems eliminates the need for visual representation of complex spatial images. The essence of the method of coordinates as a method of solving problems is that, by setting figures by equations and expressing various geometric relationships in coordinates, we can solve a geometric problem by means of algebra. The coordinate method is a universal method. It provides a close connection between algebra and geometry, which, when combined, give "rich fruits" that they could not give if they remained separate.

Keywords: plane, rectangular coordinate system, parallelogram, rhombus.

Декартова (прямоугольная) система координат

С помощью чисел можно указывать на различные объекты – называть их, характеризовать их положение и даже описывать их свойства.
Точка на плоскости описывается только своим положением (у нее нет длины, ширины и других характеристик). Для этого мы используем координаты. С их помощью можно решать различные геометрические задачи, т. к., задав расположение точек, мы однозначно задаем расстояние между ними. Т. е. зная координаты точек, мы можем вычислять расстояния между ними. Понятно, что от расстояний можно перейти к углам и т. д.
Дальше мы займемся как раз техникой работы с координатами и их применением для решения различных геометрических задач.

Как мы уже сказали, чтобы описать точку, достаточно задать ее местоположение (координаты), т. к. других характеристик (размеров, формы) у нее нет.

Чтобы задать координаты, нужна система отсчета (система координат). Понятно, что для жителя Самарканда и жителя Хорезма положение Джизака относительно их городов будет определяться по-разному (см. рис. 7).

Рис. 7. Система отсчета

Мы будем использовать прямоугольную (декартову) систему координат, с которой часто встречаемся в жизни (например, она используется при нумерации мест в кинотеатре – ряд, место) (см. рис. 8).

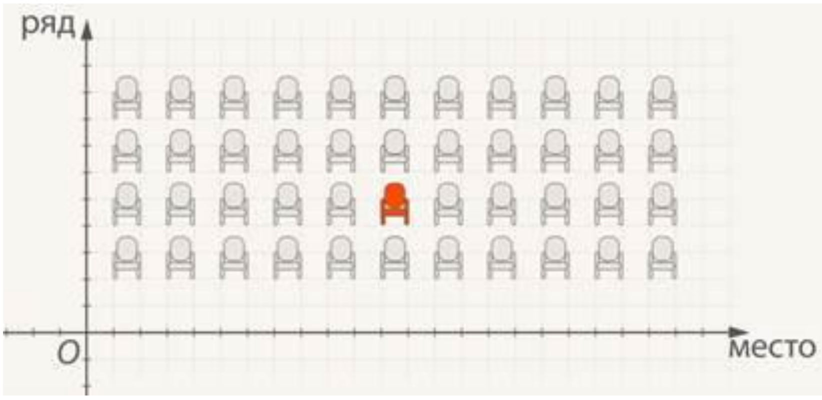

Рис. 8. Прямоугольная (декартова) система координат используется при нумерации мест в кинотеатре

Прямоугольная система координат задается тремя элементами:

1. Начало отсчета, или, что то же самое, **начало координат**. Это точка, от которой будут отсчитываться все координаты (например, Самарканд или Хорезм).

2. **Направления**. Если смотреть на север, то Самарканд для жителя Джизака будет справа, а для жителя Хорезма – слева. Если на юг, то наоборот.

Направления задаются осями. Сколько нужно осей, зависит от размерности пространства. Если все наши точки расположены на одной прямой, то достаточно будет одной оси – указать, в какую сторону идет отсчет. Для плоскости одной оси уже не хватит – нужно две (например, север-юг и запад-восток). В пространстве уже три измерения (длина, ширина, высота) и, соответственно, нужны три оси.

Система неслучайно называется прямоугольной: углы между любыми двумя ее осями – прямые. Это упрощает вычисление расстояний между точками, т. к. можно использовать теорему Пифагора, а не теорему косинусов. Хотя, в принципе, можно использовать систему координат с любыми углами между осями. Главное, чтобы они нам были известны.

3. **Масштаб**. Каждую ось нужно проградуировать. Чаще масштаб одинаков, но это не обязательно. Разные оси могут иметь разный масштаб.

Итак, мы будем работать в декартовой (прямоугольной) системе координат на плоскости, у которой две перпендикулярные оси: x (ось абсцисс) и y (ось ординат). Точка их пересечения – начало координат, ее обычно обозначают буквой O. Эта конструкция становится системой координат только после определения масштаба, градуировки осей (обычно отмечают единичные отрезки на каждой из них) (см. рис. 9).

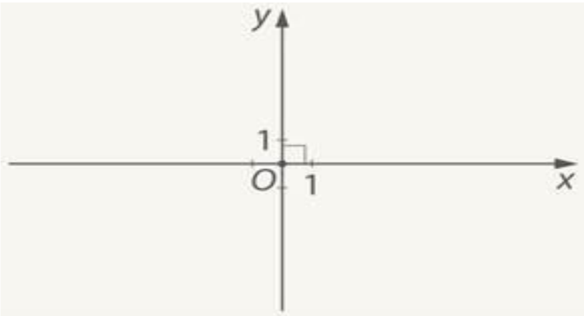

Рис. 9. Декартова (прямоугольная) система координат

Раз у нас две оси, то каждая точка будет задаваться двумя координатами. Каждая из координат показывает, на сколько вдоль соответствующей оси нужно сдвинуться от точки O. Знак показывает направление: знак «плюс» – в сторону направления оси, знак «минус» – в противоположную.

Как при надевании рубашки и пиджака важна последовательность (попробуйте сначала надеть пиджак, потом рубашку), так и при записи координат важен порядок записи. Договорились, что первой указывают абсциссу точки, а второй – ординату. Могли договориться и наоборот – это не принципиально. Принципиально, чтобы порядок для всех точек был одинаковым (см. рис. 10).

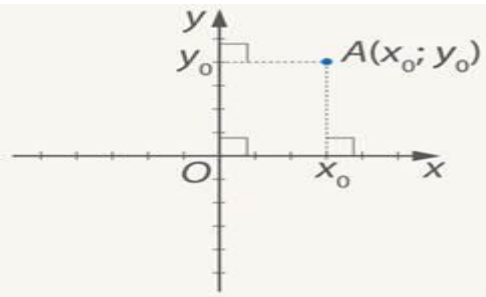

Рис. 10. Порядок записи координат

Понятно, что для любой точки существует единственная пара координат, а для любой пары координат существует единственная точка на плоскости.

Плоскость, на которой задали систему координат, часто называют **координатной плоскостью**.

Разберем, как действует метод координат в конкретных задачах.

Задача 1.

Докажите, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей (см. рис. 3).

Доказательство:

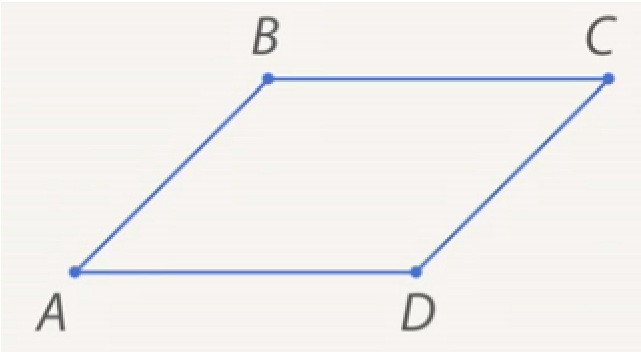

Рис. 3. Иллюстрация к задаче 1

Нужно доказать, что $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

Для доказательства воспользуемся методом координат:

1. Нарисуем еще раз параллелограмм и введем удобную систему координат (см. рис. 4).

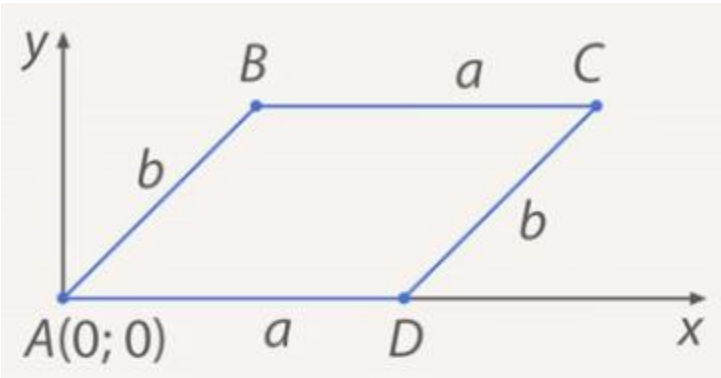

Рис. 4. Иллюстрация к задаче 1

2. Найдем координаты интересующих нас точек.

Пусть длина стороны $AD = a$, тогда длина стороны BC – тоже a и координаты точки $D(a,0)$.

Пусть координаты точки $B(b,c)$.

Найдем координаты точки $C(x, y)$ из равенства векторов:

$\overline{BC} = \overline{AD}$;

$\{x - b; y - c\} = \{a - 0; 0 - 0\}$;

$$\begin{cases} x - b = a, \\ y - c = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + b, \\ y = c. \end{cases}$$

Итак, $C(a+b;c)$.

3. Найдем квадраты длин нужных нам сторон:

$AB^2 = (b-0)^2 + (c-0)^2 = b^2 + c^2$

$AD^2 = a^2$

$AC^2 = (a+b)^2 + c^2$

$BD^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2 = (a-b)^2 + c^2$

Проверим верно ли равенство $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$:

$(a+b)^2 + c^2 + (a-b)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$

$a^2 + 2ab + b^2 + c^2 + a^2 - 2ab + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$

$2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$

Задача 2.

Даны координаты вершин трапеции *ABCD*: $A(-2;-2), B(-3;1), C(7;7), D(3;1)$. Напишите уравнения прямых, содержащих

а) диагонали *AC* и *BD*;

б) среднюю линию трапеции.

Решение (рис. 1):

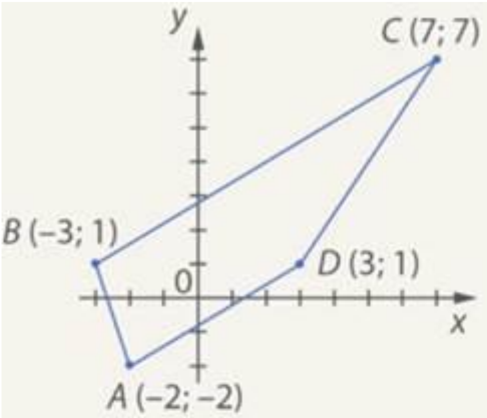

Рис. 1. Иллюстрация к задаче

$ax + by + c = 0 -$ общее уравнение прямой, оно задается конкретной тройкой чисел *a*, *b* и *c*.

а) Найдем уравнение прямой *AC*, для этого в уравнение прямой подставляем координаты точек *A* и *C:*

$$\begin{cases} -2a - 2b + c = 0, \\ 7a + 7b + c = 0. \end{cases}$$

Как и раньше, получили два уравнения с тремя неизвестными, будем решать ее методом алгебраического сложения.

$$\begin{cases} -2a - 2b + c = 0, | \cdot 7 \\ 7a + 7b + c = 0; | \cdot 2 \end{cases} <=> \begin{cases} -14a - 14b + 7c = 0, \\ + \\ 14a + 14b + 2c = 0; \end{cases} => c = 0.$$

Если c=0, то прямая проходит через начало координат. Подставим c в любое уравнение:

$$\begin{cases} c = 0, \\ a = -b \end{cases} => ax - ay = 0 => x = y.$$

Ответ: $x = y$.

б) Найдем уравнение прямой *BD*: точки *B* и *D* имеют одну и ту же ординату, равную 1, поэтому уравнение прямой *BD* $y = 1$.

Ответ: $y = 1$.

в) Найдем координаты точки *M* – середины *CD* и точки *N* – середины *AB:*

$M(5;4), N\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$ (рис. 2).

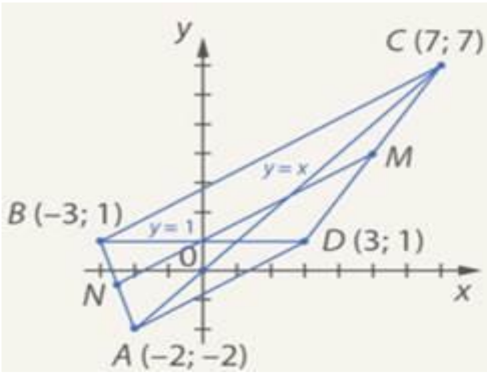

Рис. 2. Иллюстрация к задаче

Подставляем координаты точек *M* и *N* в уравнение $ax + by + c = 0$:

$$\begin{cases} 5a + 4b + c = 0, \\ -\frac{5}{2}a - \frac{1}{2}b + c = 0; | \cdot 2 \end{cases} <=> \begin{cases} 5a + 4b + c = 0, \\ -5a - b + 2c = 0; \end{cases} => b = -c.$$

Подставляем в первое уравнение:

$$\begin{cases} b = -c, \\ 5a - 4c + c = 0; \end{cases} <=> \begin{cases} b = -c, \\ a = \frac{3}{5}c; \end{cases} => \frac{3}{5}cx - cy + c = 0, c \neq 0, => 3x - 5y + 5 = 0.$$

Ответ: $3x - 5y + 5 = 0$.

Задача 3.

Написать уравнения прямых, содержащих стороны ромба, диагонали которого равны 10 см и 4 см, если известно, что диагонали лежат на осях координат. Написать уравнение окружности, вписанной в этот ромб.

Решение (рис. 3):

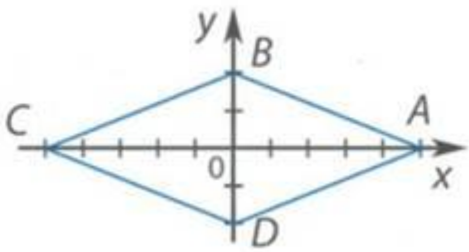

Рис. 3. Иллюстрация к задаче

Определим координаты вершин ромба (рис. 4):

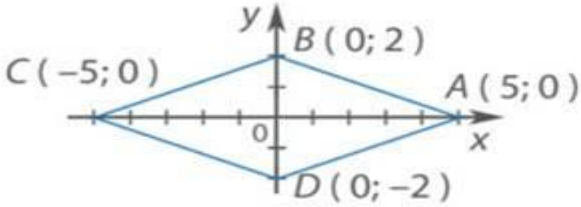

Рис. 4. Иллюстрация к задаче

$A(5;0), B(0;2), C(-5;0), D(0;\ -2)$.

Требуется написать уравнения прямых *AB*, *BC*, *CD*, *AD*. эти прямые наклонные, их уравнения будем искать в виде $y = kx + m$.

1. Составим уравнение прямой *BC*. Из рисунка видно, что *m*=2. Или составим систему, подставляя координаты точек *B* и *C* в уравнение прямой: $\begin{cases} 0 = -5k + m, \\ 2 = 0 \cdot k + m; \end{cases} => \begin{cases} k = \frac{2}{5}, \\ m = 2 \end{cases} => y = \frac{2}{5}x + 2$ или $2x - 5y + 10 = 0$.

2. Составим уравнение прямой *AD*.

$AD||BC =>$ угловые коэффициенты равны, ордината пересечения с осью *Oy* равна на -2 ,

$AD\ \ y = \frac{2}{5}x - 2$ уравнение прямой или $2x - 5y - 10 = 0$

3. Составим уравнение прямой *AB*.

$\begin{cases} 0 = 5k + m, \\ 2 = 0 \cdot k + m; \end{cases} => \begin{cases} k = -\frac{2}{5}, \\ m = 2 \end{cases} => y = -\frac{2}{5}x + 2$ или $2x + 5y - 10 = 0$.

4. Составим уравнение прямой *CD*. $CD||AB =>$ угловые коэффициенты равны, ордината пересечения с осью *Oy* равна -2;уравнение прямой $CD\ y = -\frac{2}{5}x - 2$ или $2x + 5y + 10 = 0$.

5. Теперь требуется написать уравнение окружности, вписанной в ромб. Для этого нужно определить координаты центра и радиус. Координаты центра известны – O(0;0). Радиус найдем как высоту прямоугольного треугольника *AOB*, проведенную к гипотенузе (рис. 5).

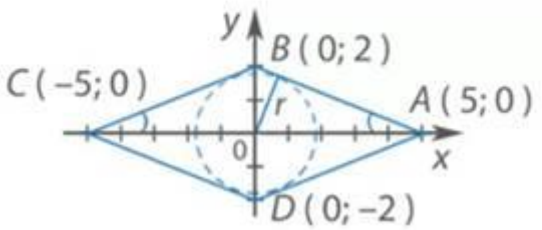

Рис. 5. Иллюстрация к задаче

$$\begin{cases} S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB, \\ S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r \end{cases} => r = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{29}}.$$

Уравнение окружности, вписанной в ромб

$$x^2 + y^2 = \frac{100}{29}.$$

Заключение

Итак, как мы видим, координатный метод имеет четкий алгоритм и не требует дополнительных построений (кроме введения осей координат). А геометрический метод, напротив, требует дополнительных построений, однако они являются стандартными. Для решения задач полезно владеть обоими методами.

Метод координат будет широко использоваться и впоследствии.

Список литературы

1. Бахвалов С.В,Бабушкин Л.И и др. Аналитическая геометрия Просвещение,1970
2. Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10–11 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2010.
3. Погорелов А.В. Геометрия, уч. для 7 – 11 кл. общеобр. учрежд. – М.: Просвещение, 1995.
4. Я.П.Понарин “Элементарная геометрия” Москва МЦНМО,2004
5. Т.Н.Кори- Ниёзий “Аналитик геометрия асосий курси” Тошкент ,1967
6. I.Isroilov,Z.Pashayev “Geometriya” O’qituvchi Toshkent 2005
7.S.V.Baxvalov,P.S.Modenov ,A.S.Parxomenko “Analitik geometriyadan masalalar to’plami” Toshkent 2005
8.Г.А.Клековкин “Решение геометрических задач’’Самара 2015г.