European Journal of Interdisciplinary Research and Development
Volume-10 Dec. - 2022
Website: www.ejird.journalspark.org ISSN (E): 2720-5746

# РОЛЬ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗНАЧИМОСТИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ

Рахимова Шохсанам Усмонали кизи
Ассистент, Ферганский политехнический институт, Фергана, Узбекистан
E-mail: egamovashohsanam1993@gmail.com

**Аннотация**

Эта статья посвящена центральной предельной теореме, одному из самых замечательных результатов теории вероятностей. Сумма независимых случайных величин, каждая из которых бесконечно мала, при определенных условиях имеет распределение, близкое к функции нормального распределения (распределению Гаусса). Значение этого результата выходит далеко за пределы теории вероятностей. Он служит основой для использования нормального распределения в процессе решения многих практических задач.

**Ключевые слова:** теория вероятностей, последовательность случайных величин, центральная предельная теорема, условие Линдеберга, теорема Линдеберга-Феллера, математическое ожидание, дисперсия, нормальное распределение, условие Ляпунова, теорема Ляпунова.

**Введения**

**ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**

**Результат 1**. Условие Линдеберга (L) достаточно, но не обязательно для того, чтобы ЦПТ была верной.

**Результат 2**: Роль условия Ляпунова для ЦПТ

**Результат 3**: условие Ляпунова является «более жестким» условием, чем условие Линдеберга (L) для выполнения ЦПТ.

ОБСУЖДЕНИЕ

Приведем простейшую версию центральной предельной теоремы, применимую к последовательности независимых случайных величин, распределенных равномерно:

**Теорема 1. [1]** $\{\xi_n, n \geq 1\}$ случайные величины независимо равномерно распределены и $M\xi_n = a$ конечное математическое ожидание и конечное $D\xi_n = \sigma^2 > 0,\ n \geq 1$. пусть имеет дисперсию. Тогда они удовлетворяют центральной предельной теореме, т.е.

$$P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$$

ЦПТ также действителен для последовательности различных независимых распределенных случайных величин при соблюдении определенных условий.

**Определение 1.** Если для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\{|x-a_k|\geq\varepsilon\}}(x-a_k)^2\,dF_k(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\ (\text{л})$$

если, то $\{\xi_k\}$, $k\geq 1$ Условие Линдеберга для последовательности случайных величин называется выполненным, где $a_k = M\xi_k, s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$ и $F_k(x)$– $\xi_k$ функция распределения случайных величин, $\xi_{nk} = \frac{\xi_k - a_k}{s_n}$ и ∀ε>0 число

**Состояние Феллера:** $\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq k\leq n} M\xi_{nk}^2 = 0(\Phi)$

$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq k\leq n} P\{|\xi_{nk}| > \varepsilon\} = 0(\text{УАН})$

Эти условия связаны следующим образом: (L)⇒(F)⇒(UAN), при этом каждое из этих условий играет свою особую роль в том, подходит ли ЦПТ.

Приведем теперь два основных результата.

**Теорема 2 (Линдеберг).[4]** Если выполняется условие Линдеберга (L) выполняется для последовательности независимых случайных величин, то для произвольного $x \in R$

$$P\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n - M(\xi_1+\ldots+\xi_n)}{\sqrt{D(\xi_1+\ldots+\xi_n)}}\leq x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du\ (1)$$

выполняется центральная предельная теорема.

**Теорема 3 (Линдеберг-Феллер).[4]** условие ( $\{\xi_n, n\geq 1\}$F ) условие (F) для последовательности выполнено. Тогда условие (L) необходимо для выполнения ЦПТ значением.

**Как различные условия влияют на соответствие ЦПТ**

Теперь мы используем условия (L) и (F), чтобы определить, как вышеупомянутые результаты связаны с ЦПТ. В связи с этим он складывается из несвязанных между собой случайных величин $\{\xi_n, n\geq 1\}$ просмотрим последовательность, вместе с этим $\xi_n \sim N(0,\sigma_n^2)$, здесь $\sigma_1^2 = 1$ и $\sigma_k^2 = 2^{k-2}$, $k \geq 2$. $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ совокупность $MS_n = 0$ равен математическому ожиданию и $s_n^2 = DS_n = 2^{n-1}$ имеет дисперсию $\frac{\xi_k}{s_n} \sim N(0,1/2)$ и по этой причине значение $n$ для $\frac{S_n}{s_n} \sim N(0,1)$. Так, $\{\xi_n\}$ так последовательность ЦПТ значением, затем

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq k\leq n}\frac{\sigma_k^2}{s_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\neq 0$$

нам ясна и вместе с этим

$$\max_{1\leq k\leq n} P\left\{\frac{|\xi_k|}{s_n}\geq\varepsilon\right\}\geq P\left\{\frac{|\xi_n|}{s_n}\geq\varepsilon\right\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-u^{2\frac{1}{2}}/2}du > 0.$$

Таким образом, мы заключаем, что условие Феллера (F) не выполняется. Поскольку это удовлетворяет ЦПТ, условие Линдеберга (L) также не выполняется. Отсюда следует, что условие Линдеберга (L) является достаточным, но не необходимым для пригодности ЦПТ.

**Условие Ляпунова и ЦПТ**

Помимо условия Линдеберга (L), есть еще одно классическое условие. Это условие называется условием Ляпунова, и оно также обеспечивает справедливость ЦПТ. Определим условие Ляпунова.

$\{\xi_n, n \geq 1\}$ – несвязанные случайные суммы, а также как обычно

$a_k = M\xi_k, \quad \sigma_k^2 = D\xi_k, \quad S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ а также $s_n = (DS_n)^{1/2}$

пусть будет каких-то $\delta > 0$ для $\xi_k, k \geq 1$ имеет упорядоченный абсолютный центральный момент, т.е. $2 + \delta -$ , т.е $M\{|\xi_k - a_k|^{2+\delta}\} < \infty$ пусть будет

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} M|\xi_k - a_k|^{2+\delta} = 0$ (2)

Условие называется **Ляпуновым**

**Теорема 4 (Ляпунова).[1]** Если $\{\xi_n\}_{n\in N}$ он существует для последовательности случайных чисел $\delta = 1$ есть, $n \to \infty$ в $\frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^{n} M|\xi_k - a_k|^3 \to 0$( **условие Ляпунова** ) (3)

если соотношение выполнено, то для этой последовательности случайных величин верна центральная предельная теорема, т.е.

$$P(S_n^* < x) \to \Phi(x), (n \to \infty)$$

$$S_n = \frac{1}{s_n}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n - (a_1 + \ldots + a_n)\right)$$

Теперь определим роль условия Ляпунова для ЦПТ.

(a) Доказательство теоремы Ляпунова показывает, что условие (2) является достаточным. (2) Легко показать, что для ЦПТ это не нужно. Смотрим пример (2), там $\xi_1 \sim N(0,1)$ и $k \geq 2$ для $\xi_k \sim N(0, 2^{k-2})$ независимые, определяемые отношениями $\{\xi_k, k \geq 1\}$ была просмотрена последовательность случайных чисел. $\delta > 0$ условие (1) не выполняется при таком выборе суммы. Однако как в примере (2). такие как $\frac{S_n}{s_n}$ нормально $N(0,1)$ не распределена и по этой причине $\{\xi_k\}$последовательность подчиняется ЦПТ.

**Вывод**

Таким образом, условие (2) не обязательно для того, чтобы ЦПТ была подходящей.

Один из способов доказательства теоремы Ляпунова состоит в доказательстве вывода условия Линдеберга (L), обеспечивающего справедливость ЦПТ, из условия Ляпунова (2). (L) Нас интересует построение конкретного примера для последовательности случайных величин, где выполняется сфера Линдеберга (т. е. выполняется ЦПТ), но не выполняется условие Ляпунова. Функция плотности для этого

$$p(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } x \leq c, \\ \dfrac{c}{x^3 \ln^2 x}, \text{ agar } x > c, \end{cases}$$

(здесь $c > 0-$ нормирующая постоянная: $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$) которая есть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ мы видим независимые одинаково распределенные случайные величины. Во-первых $0 < M\xi_1 < \infty, \quad 0 < D\xi_1 < \infty$ и, следовательно, условие Линдеберга (L) выполнено, и ЦПТ выполняется для последовательности $\{\xi_n\}$

Во-вторых $\delta > 0$ если для любого

$$M|\xi_1|^{2+\delta} = \int_c^\infty \frac{cdx}{x^{1-\delta}\ln^2 x} = \int_c^\infty \frac{cx^\delta d(\ln x)}{\ln^2 x} = \int_c^\infty \frac{ce^{\delta u}}{u^2} du = \infty.$$

Отсюда следует, что условие Ляпунова (1) не может быть выполнено. Иными словами, условие Ляпунова является более «жестким» по сравнению с условием Линдеберга (L) условием выполнения ЦПТ. Однако проверить условие Ляпунова проще, чем условие Линдеберга, когда момент третьего порядка конечен.

**СПИСОК ССЫЛОК**

1. Abdushukurov, A. A., & Zuparov, T. (2010). Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. O‘quv-uslubiy majmua, O‘zMU, 12.
2. Феллер, В. (1984). Введение в теорию вероятностей и ее применение в 2-х т.: пер. с англ. С предисловием Колмогорова АН–М.
3. Стоянов, Й. (2022). Контрпримеры в теории вероятностей. Litres.
4. Hsu, P. L., & Robbins, H. (1947). Complete convergence and the law of large numbers. Proceedings of the national academy of sciences, 33(2), 25-31.
5. Файзуллаев, Ж. И. (2020). Методика обучения ортогональных проекций геометрического тела в координатных плоскостях на основе развития математической компетентности. Вестник Ошского государственного университета, (1-4), 285-289.
6. Файзуллаев, Д. И. (2022). Развитие профессиональной компетентности студентов технических высших учебных заведений на основе деятельностного подхода. Central asian journal of mathematical theory and computer sciences, 3(10), 102-107.
7. Файзуллаев, Ж. И. (2022). Техника олий таълим муассасалари талабаларининг математик компетенциясини ривожлантириш математик таълим сифатини оширишнинг асоси сифатида. Pedagogs jurnali, 9(2), 248-256.
8. Abdujabbor, A., & Nabiyevich, F. A. (2022). Econometric Assessment of the Perspective of Business Entities. Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics, 8, 25-29.
9. Абдураззаков, А., Фозилов, А. Н., & Ташпулатов, А. (2021). Некоторые вопросы оптимизации рынка труда. The Scientific Heritage, (76-2), 29-32.
10. Расулов, Р., Сатторов, А., & Махкамова, Д. (2022). Вычисленние Квадрат Нормы Функционала Погрошности Улучшенных Квадратурных Формул В Пространстве. Central asian journal of mathematical theory and computer sciences, 3(4), 114-122.
11. Rashidjon, R., & Sattorov, A. (2021). Optimal Quadrature Formulas with Derivatives in the Space. Middle European Scientific Bulletin, 18, 233-241.
12. Abdujabbor, A., Nasiba, M., & Nilufar, M. (2022). The Numerical Solution of Gas Filtration in Hydrodynamic Interconnected Two-Layer Reservoirs. Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics, 6, 18-21.
13. Абдуразаков, А., Махмудова, Н. А., & Мирзамахмудова, Н. Т. (2022). Об одном численном решении краевых задач для вырождающихся параболических уравнений имеющие приложении в теории фильтрации. Universum: технические науки, (5-1 (98)), 41-45.

14. Abdujabbor, A., Nasiba, M., & Nilufar, M. (2022). Semi-discretization method for solving boundary value problems for parabolic systems. Texas Journal of Multidisciplinary Studies, 13, 77-80.
15. Shaev, A. K., & Makhmudova, N. A. (2021). Convergence of the method of straight lines for solving parabolic equations with applications of hydrodynamically unconnected formations. Ministry of higher and secondary special education of the republic of Uzbekistan national university of Uzbekistan Uzbekistan academy of sciences vi Romanovskiy institute of mathematics, 280.
16. Абдуразаков, А., Махмудова, Н. А., & Мирзамахмудова, Н. Т. (2021). Численное решение краевых задач для вырождающихся уравнений параболического типа, имеющих приложения в фильтрации газа в гидродинамических невзаимосвязанных пластах. Universum: технические науки, (10-1 (91)), 14-17.
17. Далиев, Б. С. (2021). Оптимальный алгоритм решения линейных обобщенных интегральных уравнений Абеля. Проблемы вычислительной и прикладной математики, 5(35), 120-129.
18. Акбаров, Д. Е., Абдуразоков, А., & Далиев, Б. С. (2021). О Функционально Аналитической Формулировке И Существования Решений Системы Эволюционных Операторных Уравнений С Краевыми И Начальными Условиями. Central asian journal of mathematical theory and computer sciences, 2(11), 14-24.
19. Kosimova, M. Y., Yusupova, N. X., & Kosimova, S. T. (2021). Бернулли тенгламасига келтирилиб ечиладиган иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун учинчи чегаравий масала. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 1(10), 406-415.
20. Yusupova, N. K., & Abduolimova, M. Q. (2022). Use fun games to teach geometry. Central asian journal of mathematical theory and computer sciences, 3(7), 58-60.
21. Yusupova, N. X., & Nomoanjonova, D. B. (2022). Innovative technologies and their significance. Central asian journal of mathematical theory and computer sciences, 3(7), 11-16.
22. Shakhnoza, S. (2022). Application of Topology in Variety Fields. Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics, 11, 63-71.
23. Bozarov, B. I. (2019). An optimal quadrature formula with sinx weight function in the Sobolev space. Uzbekistan academy of sciences vi romanovskiy institute of mathematics, 47.
24. Akbarov, D. E., Kushmatov, O. E., Umarov, S. A., Bozarov, B. I., & Abduolimova, M. Q. (2021). Research on General Mathematical Characteristics of Boolean Functions' Models and their Logical Operations and Table Replacement in Cryptographic Transformations. Central asian journal of mathematical theory and computer sciences, 2(11), 36-43.
25. Shavkatjon o'g'li, T. B. (2022). Proving The Inequalities Using a Definite Integral and Series. Texas Journal of Engineering and Technology, 13, 64-68.
26. Shavkatjon o'g'li, T. B. (2022). Some integral equations for a multivariable function. Web of Scientist: International Scientific Research Journal, 3(4), 160-163.

27. Alimjonova, G. (2021). Modern competencies in the techno-culture of future technical specialists. Current research journal of pedagogics, 2(06), 78-84.
28. Kupaysinova, Z. S. (2022). Attempts of Central Asian Scholars to Prove Euclid's Fifth Postulate. Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics, 12, 71-75.
29. Yakubjanovna, Q. M. (2022). Some Methodological Features of Teaching the Subject «Higher Mathematics» in Higher Educational Institutions. Eurasian Journal of Physics, Chemistry and Mathematics, 4, 62-65.
30. Abdurahmonovna, N. G. (2022). Factors for the Development of Creativity and Critical Thinking in Future Economists Based on Analytical Thinking. Journal of Ethics and Diversity in International Communication, 2(5), 70-74.
31. Abdurahmonovna, N. G. (2022). Will Be on the Basis of Modern Economic Education Principles of Pedagogical Development of Analytical Thinking in Economists. European Multidisciplinary Journal of Modern Science, 6, 627-632.
32. Nazarova, G. A. (2022). Will be on the basis of modern economic education Principles of pedagogical development of analytical thinking in economists. Journal of Positive School Psychology, 9579-9585.
33. Назарова, Г. А. (2022). Аналитик тафаккурни ривожлантиришнинг педагогик зарурати. Integration of science, education and practice. Scientific-methodical journal, 3(3), 309-314.
34. Kosimova, M. Y. (2022). Talabalarni ta'lim sifatini oshirishda fanlararo uzviyligidan foydalanish. Nazariy va amaliy tadqiqotlar xalqaro jurnali, 2(2), 57-64.
35. Qosimova, M. Y., & Yusupova, N. X. (2020). On a property of fractional integro-differentiation operators in the kernel of which the meyer function. Scientific-technical journal, 24(4), 48-50.
36. Mirzakarimov, E. M., & Fayzullaev, J. S. (2020). Improving the quality and efficiency of teaching by developing students* mathematical competence using the animation method of adding vectors to the plane using the maple system. scientific bulletin of namangan state university, 2(9), 336-342.
37. Mirzakarimov, E. M., & Faizullaev, J. I. (2019). Method of teaching the integration of information and educational technologies in a heterogeneous parabolic equation. scientific bulletin of namangan state university, 1(5), 13-17.
38. Mirzaboevich, M. E. (2021). Using Maple Programs in Higher Mathematics. Triangle Problem Constructed on Vectors in Space. Central asian journal of mathematical theory and computer sciences, 2(11), 44-50.
39. Мирзакаримов, Э. М., & Файзуллаев, Д. И. (2021). Выполнять Линейные Операции Над Векторами В Пространстве В Системе Maple. Central asian journal of mathematical theory and computer sciences, 2(12), 10-16.
40. Мирзакаримов, Э. М. (2022). Использовать Систему Maple Для Определения Свободных Колебаний Прямоугольной Мембраны При Начальных Условиях. Central Asian Journal Of Mathematical Theory And Computer Sciences, 3(1), 9-18.

41. Мамаюсупов, Ж. Ш. (2022). Интегральное преобразование Меллина для оператора интегродифференцирования дробного порядка. Periodica Journal of Modern Philosophy, Social Sciences and Humanities, 11, 186-188.
42. Mamayusupov, J. S. O. (2022). "Iqtisod" yo'nalishi mutaxassislarini tayyorlashda matematika fanini o'qitish uslubiyoti. Academic research in educational sciences, 3(3), 720-728.
43. Qo'Ziyev, S. S., & Mamayusupov, J. S. (2021). Umumiy o 'rta ta'lim maktablari uchun elektron darslik yaratishning pedagogik shartlari. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 1(10), 447-453.
44. Kosimov, K., & Mamayusupov, J. (2019). Transitions melline integral of fractional integrodifferential operators. Scientific Bulletin of Namangan State University, 1(1), 12-15.
45. Qosimova, S. T. (2021). Two-point second boundary value problem for a quadratic simple second-order differential equation solved by the bernoulli equation. Innovative Technologica: Methodical Research Journal, 2(11), 14-19.
46. Jalilov, I. I. U. (2022). К актуальным проблемам становления педагогического мастерства преподавателя. Nazariy va amaliy tadqiqotlar xalqaro jurnali, 2(9), 81-89.
47. Jalilov, I. (2019). To the problems of innovation into the educational process. Scientific Bulletin of Namangan State University, 1(3), 344-347.
48. Акбаров, Д. Е., Кушматов, О. Э., Умаров, Ш. А., & Расулов, Р. Г. (2021). Исследования Вопросов Необходимых Условий Крипто Стойкости Алгоритмов Блочного Шифрования С Симметричным Ключом. Central asian journal of mathematical theory and computer sciences, 2(11), 71-79.